Probabilidade

Parte 2

Prof.: Eduardo Vargas Ferreira

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DEST
Departamento de Estatística

Outras definições

- **Espaço amostral (Ω):** conjunto de todos os resultados possíveis (Ω);
- **Função de probabilidade, $P(\omega)$:** fornece a probabilidade para cada resultado $\omega \in \Omega$;
  1. A probabilidade está entre 0 e 1;
  2. A probabilidade total de todos os resultados possíveis é 1.
- **Experimento:** um procedimento reproduzível;
- **Evento:** um subconjunto do espaço amostral.

Exemplo: horário de chegada da aeronave no aeroporto

1. **Experimento:** verificar se uma aeronave chegou no horário

Exemplo: horário de chegada da aeronave no aeroporto

1. **Característica de interesse**
   - Horário de chegada da aeronave no aeroporto
2. **Instrumento de medição**
   - Relógio da torre de controle.
3. **Procedimento**
   - O horário de chegada será o momento em que o trem de pouso da aeronave tocar a pista.
4. **Critério**
   - A aeronave está no prazo se o horário de chegada for igual ao horário programado mais ou menos 15 minutos.

Outras definições

- **Espaço amostral (Ω):** conjunto de todos os resultados possíveis (Ω);
- **Função de probabilidade, $P(\omega)$:** fornece a probabilidade para cada resultado $\omega \in \Omega$;
  1. A probabilidade está entre 0 e 1;
  2. A probabilidade total de todos os resultados possíveis é 1.
- **Experimento:** um procedimento reproduzível;
- **Evento:** um subconjunto do espaço amostral.

Exemplo: lançar uma moeda duas vezes

- Considere o experimento de lançar uma moeda duas vezes:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}; \qquad \begin{array}{l} \omega_1 = (C, C);\ \omega_2 = (C, K); \\ \omega_3 = (K, C);\ \omega_4 = (K, K); \end{array}$$

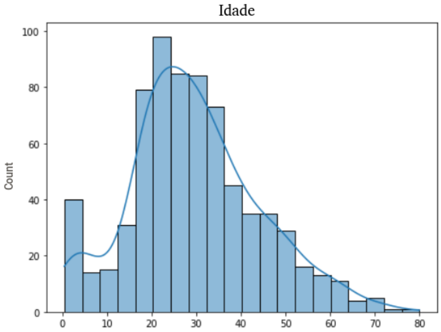
- Assumindo que a moeda é honesta:

$$P(\omega_i) = \frac{1}{4},\ \forall i = 1, 2, 3, 4.$$

- Seja o evento A = obter duas faces iguais:

$$P(A) = P(\{\omega_1, \omega_4\}) = P(\omega_1) + P(\omega_4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo: investigando o naufrágio do Titanic



Idade	P(Idade)
$0 \vdash 5$	0.056
$5 \vdash 10$	0.030
$10 \vdash 15$	0.022
$15 \vdash 20$	0.120
$20 \vdash 25$	0.159
$25 \vdash 30$	0.148
$30 \vdash 35$	0.133
$35 \vdash 40$	0.100
$40 \vdash 45$	0.067
$45 \vdash 50$	0.057
$50 \vdash 55$	0.044
$55 \vdash 60$	0.022
> 60	0.021

$P(y_1) = 0,228$

$P(y_2) = 0,772$

Y = indivíduos com mais de 20 anos

Y	0	1
P(Y = y)	0.228	0.772

Exemplos: compradores em potencial

- Clientes que realizaram mais de 5 compras nos últimos 6 meses.

Exemplos: clientes em dívida

- Clientes em dívida com o banco há mais de 1 ano.

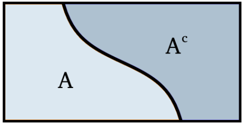
Probabilidade e operações com eventos

- **Complementar:** $P(A^c) = 1 - P(A)$;
- **Eventos disjuntos:** Se L e R são disjuntos, então

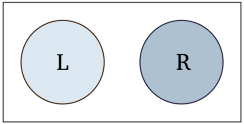
$$P(L \cup R) = P(L) + P(R);$$

- **Princípio da inclusão e exclusão:** para qualquer L e R

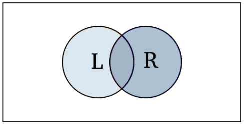
$$P(L \cup R) = P(L) + P(R) - P(L \cap R).$$



$\Omega = A \cup A^c$, no overlap



$L \cup R$, no overlap



$L \cup R$, overlap $= L \cap R$

Exemplo: distribuição dos estudantes

- Considere a distribuição dos estudantes de uma universidade dada por:

	Homens (H)	**Mulheres** (F)	**Total**
Matemática pura (M)	$\boxed{70}$	40	110
Matemática aplicada (A)	$\boxed{15}$	15	30
Estatística (E)	10	20	30
Computação (C)	20	10	30
Total	115	85	200

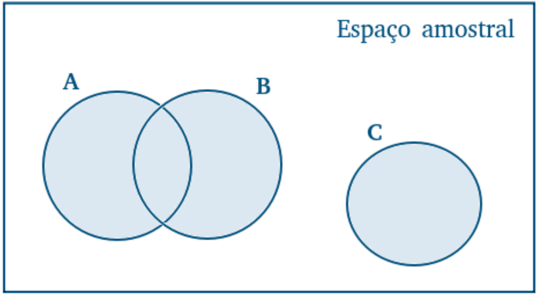
1. $P(E) = \dfrac{10+20}{200};$

2. $P(A \cup H) = P(A) + P(H) - P(A \cap H)$

$$= \frac{30}{200} + \frac{115}{200} - \frac{15}{200} = \frac{130}{200}.$$

Diagrama de Venn

- O retângulo representa o espaço amostral e os círculos representam os eventos com as interseções.

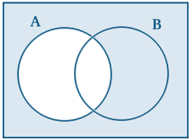


- Dessa forma é possível entender as relações entre os eventos de uma forma mais intuitiva.

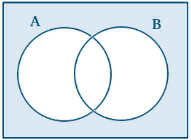
Exemplo: cálculo de probabilidade com o Diagrama de Venn

- Considere um experimento aleatório e os eventos A e B associados, tq $P(A) = 1/2, P(B) = 1/3$ e $P(A \cap B) = 1/4$. Determine:

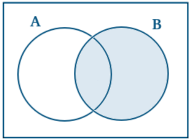
1. $$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$



2. $$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$



3. $$P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = P(B) = \frac{1}{3};$$



Operações entre conjuntos

- As operações de reunião, intersecção e complementação entre eventos possuem propriedades análogas àquelas entre conjuntos, p. ex.:

(a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(c) $A \cap \emptyset = \emptyset, \; A \cup \emptyset = A$

(d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(e) $(A^c \cup B^c)^c = (A \cap B)$

(f) $A \cap A^c = \emptyset, \quad A \cup A^c = \Omega$

(g) $A \cap \Omega = A, \; A \cup \Omega = \Omega$

(h) $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$

Referências

- Bussab, WO; Morettin, PA. Estatística Básica. São Paulo: Editora Saraiva, 2006 (5ª Edição).
- Magalhães, MN; Lima, ACP. Noções de Probabilidade e Estatística. São Paulo: EDUSP, 2008 (6ª edição).

- **Algumas das figuras desta apresentação foram retiradas do livro "Estatística Básica" (Bussab & Morettin, 2006).**