Probabilidade

Parte 6

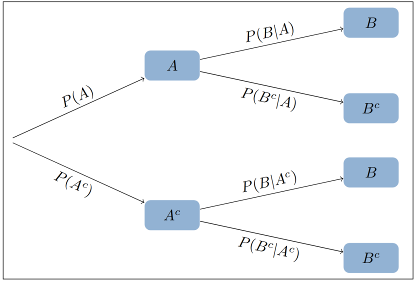
Prof.: Eduardo Vargas Ferreira

Regra de Bayes

Thomas Bayes
1702 - 1761

Calculating a particular conditional probability that can't be directly viewed and is estimated from probabilities that can be viewed.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \cdot \frac{P(B|A)}{P(B)}$$



Exemplo: filtro de Spam

$$P(\text{ Spam } \mid \text{ Palavras }) \quad = \quad P(\text{ Spam}) \cdot \frac{P(\text{ Palavras } \mid \text{ Spam })}{P(\text{ Palavras })}$$

Exemplo: detecção de fraude

$$P(\text{ Fraude} \mid \text{Transações }) \;=\; P(\text{ Fraude}) \cdot \frac{P(\text{ Transações} \mid \text{Fraude })}{P(\text{ Transações })}$$

Exemplo: probabilidade de compra

Desconto

$$X_1 = \begin{cases} 0, & \text{sem desconto} \\ 1, & \text{com desconto} \end{cases}$$

Frete grátis

$$X_2 = \begin{cases} 0, & \text{sem frete grátis} \\ 1, & \text{com frete grátis} \end{cases}$$

Sexo

$$X_3 = \begin{cases} 0, & \text{feminino} \\ 1, & \text{masculino} \end{cases}$$

$$P(\,Buy \mid X_1, X_2, X_3) \;\propto\; P(Buy) \cdot P(X_1 \mid Buy) \cdot P(X_2 \mid Buy) \cdot P(X_3 \mid Buy)$$

Exemplo: produtos defeituosos

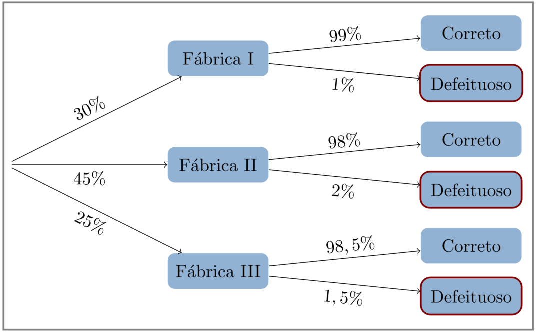
- Uma companhia possui três fábricas que produzem o mesmo produto.

(i) **Fábrica I:** responsável por **30**% da produção e **1**% de itens defeituosos.

(ii) **Fábrica II:** responsável por **45**% da produção e **2**% de itens defeituosos.

(iii) **Fábrica III:** responsável por **25**% da produção com **1,5**% de defeituosos.

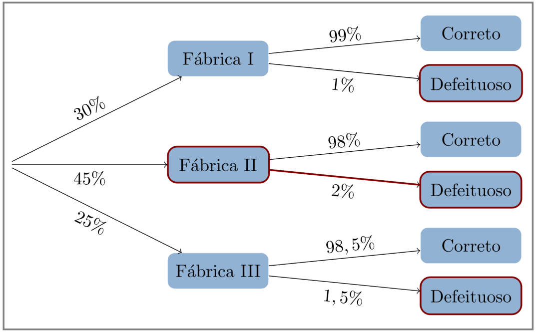
Exemplo: produtos defeituosos



1. Qual a probabilidade de encontrar um item defeituoso?

$$
\begin{aligned}
P(D) &= P(F_1)\cdot P(D|F_1)+P(F_2)\cdot P(D|F_2)+P(F_3)\cdot P(D|F_3) \\
&= 0{,}3\cdot 0{,}01 + 0{,}45\cdot 0{,}02 + 0{,}25\cdot 0{,}015 \\
&= 0{,}01575.
\end{aligned}
$$

Exemplo: produtos defeituosos

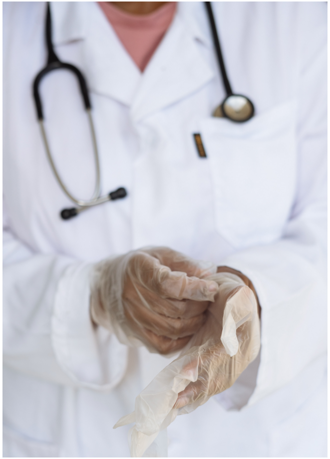


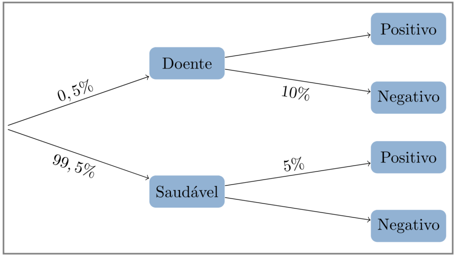
2. Dado que encontramos um produto defeituoso, qual a probabilidade de que ele tenha sido produzido na Fábrica II?

$$P(F_2|D) = \frac{P(F_2) \cdot P(D|F_2)}{P(D)} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}02}{0{,}01575} = 0{,}5714.$$

Exemplo: teste de triagem

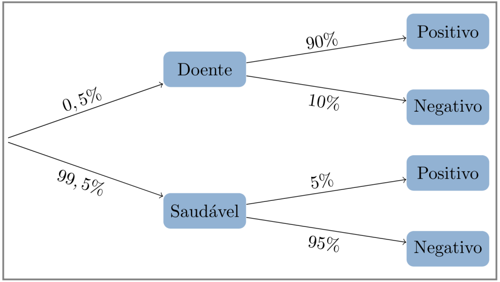
- Considere um teste de triagem de rotina para uma doença. Suponha que a frequência da doença na população (taxa básica) seja de 0,5%.





- $P(\text{Falso negativo}) = P(T - |D+) = 10\%$;
- $P(\text{Falso positivo}) = P(T + |D-) = 5\%$.

Exemplo: teste de triagem



- As probabilidades complementares das quantidades anteriores são:

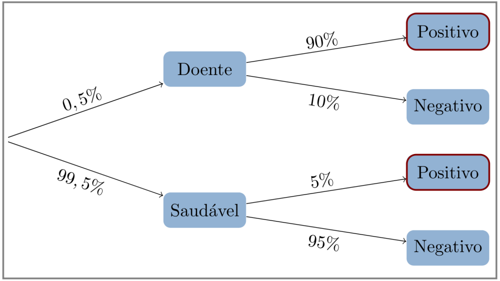
$$P(T+|D+) = 1 - P(T-|D+) = 90\%;$$

$$P(T-|D-) = 1 - P(T+|D-) = 95\%;$$

Pergunta: Qual a probabilidade de se ter a doença, dado um teste positivo?

$$P(D+|T+) = \frac{P(D+) \cdot P(T+|D+)}{P(T+)}$$

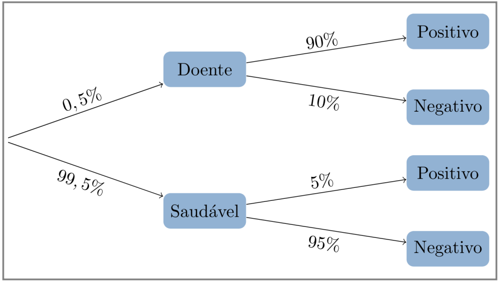
Exemplo: teste de triagem



- Calculamos o denominador utilizando a lei da probabilidade total:

$$
\begin{aligned}
P(T+) &= P(T+\cap\ D+) \ + \ P(T+\cap\ D-)\\
&= P(D+)\cdot P(T+|D+) \ + \ P(D-)\cdot P(T+|D-)\\
&= 0,9\times 0,005 \ + \ 0,05\times 0,995\\
&= 0,05425.
\end{aligned}
$$

Exemplo: teste de triagem



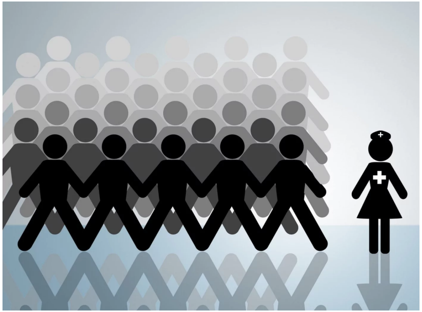
- Assim, a probabilidade de se ter a doença, dado um teste positivo será:

$$
\begin{aligned}
P(D+|T+) &= P(D+) \cdot \frac{P(T+|D+)}{P(T+)} \\
&= 0,005 \cdot \frac{0,9}{0,05425} \\
&\approx 8,3\%.
\end{aligned}
$$

Washington Post

“Realizar um simples exame de urina pode levar a um falso positivo, o que poderia desencadear uma cascata de outros testes, apenas para descobrir ao final que não há nada de errado com você", diz Mehrotra.

Link para o artigo



Referências

- Bussab, WO; Morettin, PA. Estatística Básica. São Paulo: Editora Saraiva, 2006 (5ª Edição).

- Magalhães, MN; Lima, ACP. Noções de Probabilidade e Estatística. São Paulo: EDUSP, 2008.