Variáveis Aleatórias

Parte 5

Prof.: Eduardo Vargas Ferreira

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DEST
Departamento de Estatística

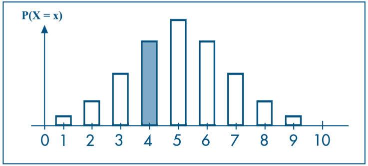
Variáveis aleatórias contínuas

Definição: Uma função X, definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é dita uma variável aleatória contínua.



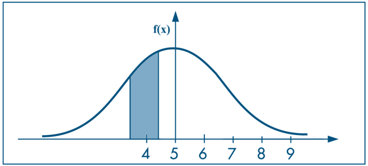
Variáveis aleatórias contínuas

Distribuição discreta



$$P(X = x)$$

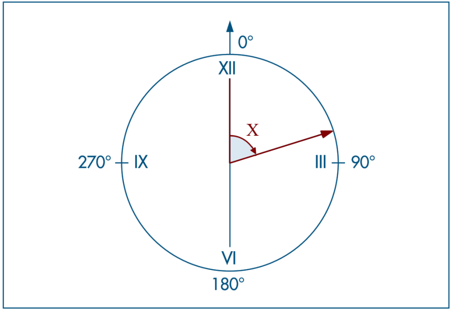
Distribuição contínua



$$P(a \leq X \leq b)$$

Exemplo: relógio mecânico

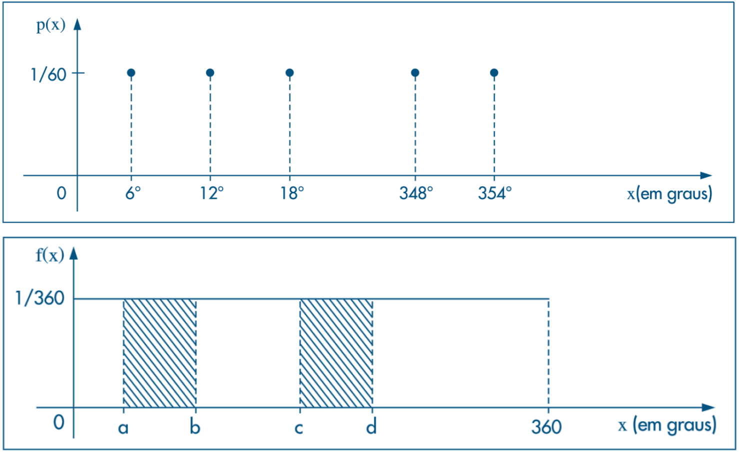
- O ponteiro dos segundos de um relógio mecânico pode parar a qualquer instante, devido a algum defeito técnico ou término da bateria.



X = ângulo entre o XII e o ponteiro dos segundos.

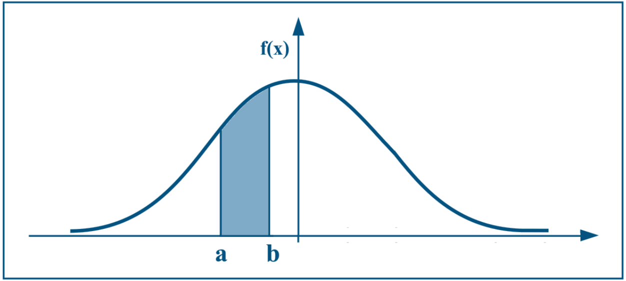
Exemplo: relógio mecânico

x	0°	6°	12°	18°	...	348°	354°
$p(x)$	1/60	1/60	1/60	1/60	...	1/60	1/60



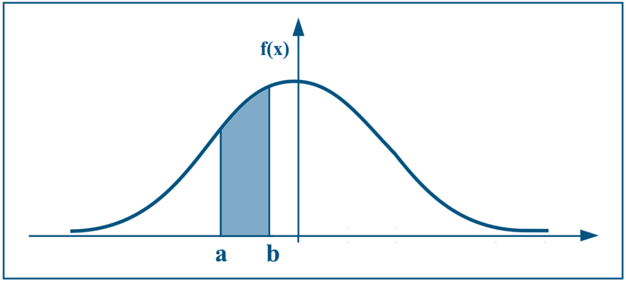
Função densidade de probabilidade (f.d.p.)

- A função $f(x)$ é chamada função densidade de probabilidade ($f.d.p.$).



$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\ dx$$

Propriedades da $f.d.p.$

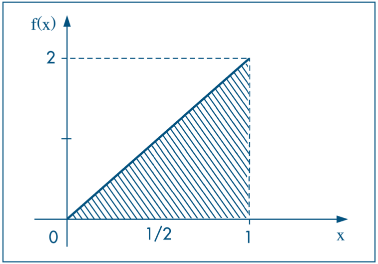


$$\left.\begin{array}{l} \textbf{i)}\quad 0 \leq f(x) \quad \forall x \\ \\ \textbf{ii)}\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \end{array}\right\} \quad 0 \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq 1$$

Exemplo: demanda de água potável

- A demanda semanal de água potável de uma cadeia de lojas, em milhares de litros, é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 < x < 1. \\ 0, & \text{caso contrário} . \end{cases}$$

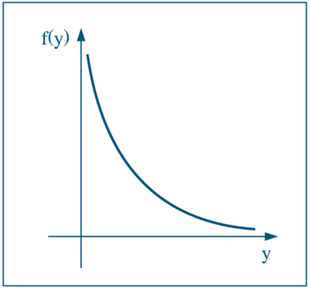


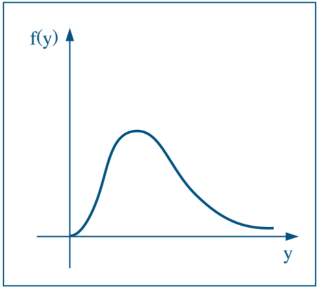
i) $2x \geq 0, \ \forall x;$

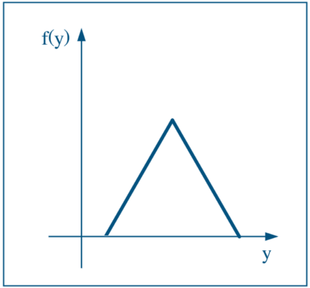
ii) $\int_0^1 2x \; dx = 1.$

Característica de uma $f.d.p.$

- Qualquer função não negativa, cuja área total sob a curva seja igual à 1, pode caracterizar uma $f.d.p.$







Exemplo: conserto de um fusca

- O tempo necessário, em horas, para consertar um fusca em uma garagem é dado por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 1. \\ 2 - x, & \text{se } 1 \leq x < 2. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{0} 0\ dx + \underbrace{\int_{0}^{1} x\ dx}_{\downarrow} + \underbrace{\int_{1}^{2} 2 - x\ dx}_{\downarrow} + \int_{2}^{\infty} 0\ dx = 1$$

$$\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2} \qquad \left.2x - \frac{x^2}{2}\right|_1^2 = \frac{1}{2}$$

Exemplo: colher medidora

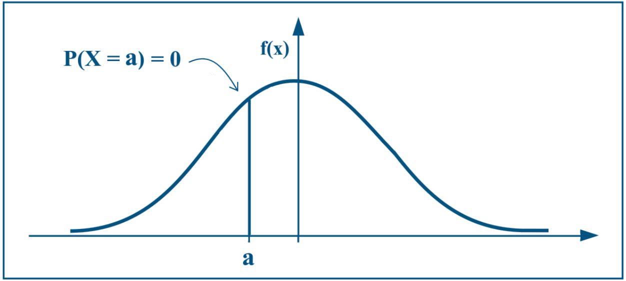
- Considere que a distribuição do erro de medição, em gramas, de uma colher medidora seja:

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2, & \text{se } 0 \leq x < 1. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{0} 0\ dx + \underbrace{\int_{0}^{1} Cx^2\ dx}_{\downarrow} + \int_{1}^{\infty} 0\ dx = 1$$

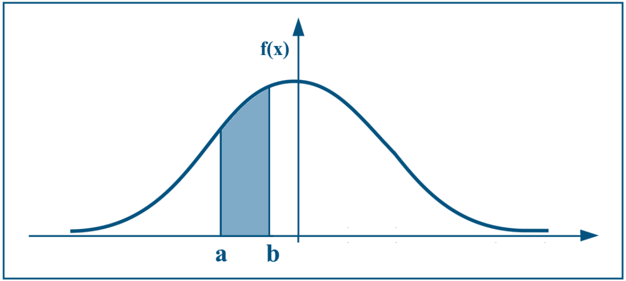
$$\left.\frac{Cx^3}{3}\right|_{0}^{1} = 1 \rightarrow C = 3$$

Probabilidade de um ponto



$$P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(x)\, dx = 0$$

Probabilidade de um ponto



$$P(a \leq X \leq b)$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$P(a < X < b) \qquad\qquad P(a \leq X < b)$$

Exemplo: vida útil de eletrodomésticos

- A vida útil, em anos, de um eletrodoméstico é uma variável aleatória com densidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot e^{-x/2}}{4}, & \text{se } x \geq 0. \\ 0, & \text{caso contrário }. \end{cases}$$

1. Se o tempo de garantia do fabricante é de seis meses, qual a proporção de aparelhos que devem usar essa garantia?

$$\begin{aligned} P\left(X < \frac{1}{2}\right) &= \int_0^{1/2} \frac{x \cdot e^{-x/2}}{4}\, dx \\ &= \left.\frac{-2e^{-x/2}(x+2)}{4}\right|_0^{1/2} \\ &= 0.0265. \end{aligned}$$

Referências

- Bussab, WO; Morettin, PA. Estatística Básica. São Paulo: Editora Saraiva, 2006 (5ª Edição).
- Magalhães, MN; Lima, ACP. Noções de Probabilidade e Estatística. São Paulo: EDUSP, 2008.