Variáveis Aleatórias

Parte 6

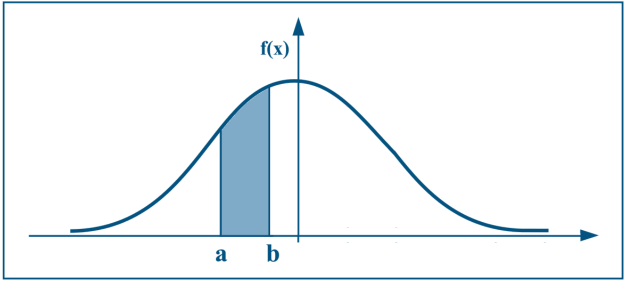
Prof.: Eduardo Vargas Ferreira

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DEST
Departamento de Estatística

Função densidade de probabilidade (f.d.p.)

- A função $f(x)$ é chamada função densidade de probabilidade $(f.d.p.)$.

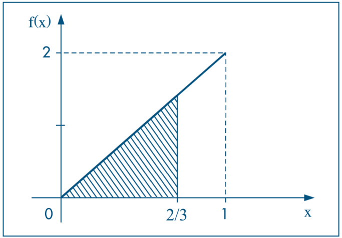


$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Exemplo: demanda de água potável

- A demanda semanal de água potável de uma cadeia de lojas, em milhares de litros, é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 < x < 1. \\ 0, & \text{caso contrário} . \end{cases}$$



1. Calcule a probabilidade de X assumir valores menores do que $\dfrac{2}{3}$.

$$P\left(X \leq \frac{2}{3}\right) = \int_{-\infty}^{2/3} 2x \; dx = x^2 \Big|_0^{2/3} = 0.44$$

Exemplo: vida útil de eletrodomésticos

- A vida útil, em anos, de um eletrodoméstico é uma variável aleatória com densidade dada por:

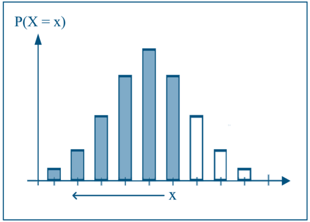
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot e^{-x/2}}{4}, & \text{se } x \geq 0. \\ 0, & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

1. Se o tempo de garantia do fabricante é de seis meses, qual a proporção de aparelhos que devem usar essa garantia?

$$\begin{aligned} P\left(X < \frac{1}{2}\right) &= \int_{-\infty}^{1/2} \frac{x \cdot e^{-x/2}}{4}\, dx \\ &= \left.\frac{-2e^{-x/2}(x+2)}{4}\right|_0^{1/2} \\ &= 0.0265. \end{aligned}$$

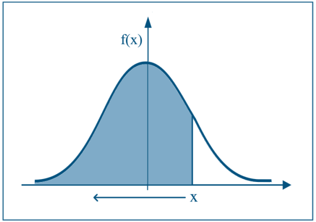
Função de distribuição acumulada (f.d.a.)

Distribuição discreta



$$P(X \leq x) = \sum_{t=-\infty}^{x} P(X = t)$$

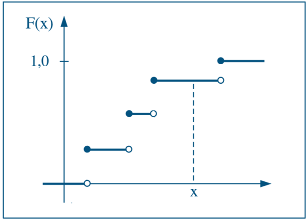
Distribuição contínua



$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

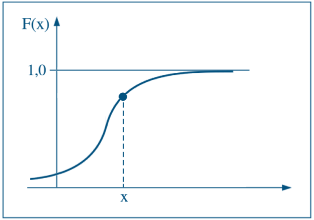
Função de distribuição acumulada (f.d.a.)

Distribuição discreta



$$P(X \leq x) = \sum_{t=-\infty}^{x} P(X = t)$$

Distribuição contínua

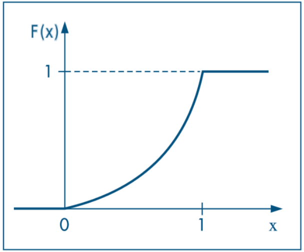


$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$$

Função de distribuição acumulada (f.d.a.)

- Dada uma v.a. X com função densidade de probabilidade $f(x)$, podemos definir a sua função de distribuição acumulada, $F(x)$, da seguinte forma:

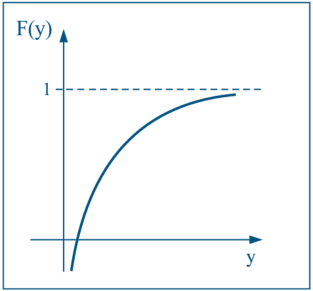
$$F(x) \quad = \quad P(X \leq x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt.$$

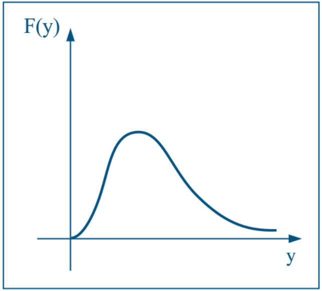


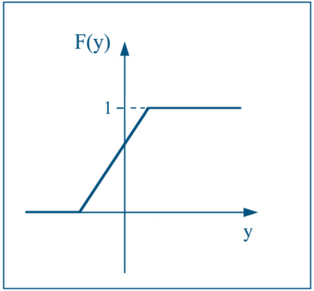
1. $0 \leq F(x) \leq 1, \ \forall x$ real;
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$;
3. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Exemplo simulado

- Quais das seguintes funções é uma $f.d.a$?



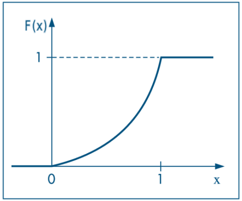




Exemplo: demanda de água potável

- A demanda semanal de água potável de uma cadeia de lojas, em milhares de litros, é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 < x < 1. \\ 0, & \text{caso contrário }. \end{cases}$$



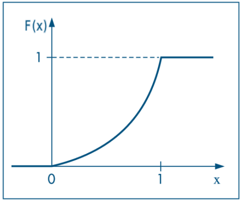
2. Calcule a distribuição acumulada, $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0. \\ \displaystyle\int_0^x 2t\ dt = t^2\Big|_0^x = x^2, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Exemplo: demanda de água potável

- A demanda semanal de água potável de uma cadeia de lojas, em milhares de litros, é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 < x < 1. \\ 0, & \text{caso contrário }. \end{cases}$$



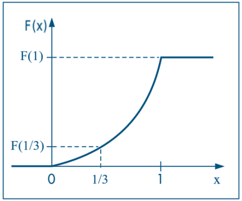
2. Calcule a distribuição acumulada, $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0. \\ x^2, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Exemplo: demanda de água potável

- A demanda semanal de água potável de uma cadeia de lojas, em milhares de litros, é dada por:

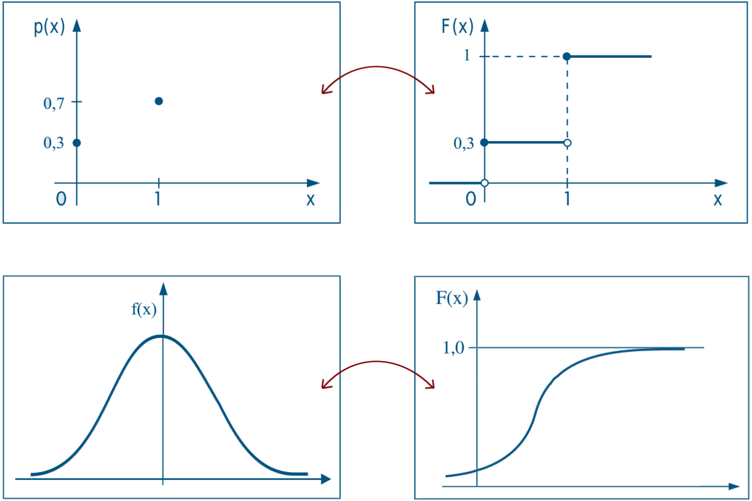
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 < x < 1. \\ 0, & \text{caso contrário }. \end{cases}$$



3. Calcule a probabilidade de X estar entre $1/3$ e 1.

$$\begin{aligned} P(1/3 < X \leq 1) &= P(X \leq 1) - P(X \leq 1/3) \\ &= F(1) - F(1/3) \\ &= (1)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

Relação entre $f(x)$ e $F(x)$



Exemplo: envase de detergente

- O volume envasado de detergente líquido por uma pessoa tem a seguinte f.d.p.:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{150}, & \text{se } \; 4900 \; \leq \; x \; < \; 5050. \\ 0, & \text{caso contrário} \; . \end{cases}$$

1. Encontre a distribuição acumulada de X.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \; < \; 4900. \\ \displaystyle\int_{4900}^{x} \frac{1}{150} \, dt \; = \; \frac{x - 4900}{150}, & \text{se } \; 4900 \; \leq \; x \; < \; 5050. \\ 1, & \text{se } x \geq 5050. \end{cases}$$

Exemplo: envase de detergente

- O volume envasado de detergente líquido por uma pessoa tem a seguinte f.d.p.:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{150}, & \text{se} \quad 4900 \leq x < 5050. \\[2ex] 0, & \text{caso contrário} \ . \end{cases}$$

1. Encontre a distribuição acumulada de X.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 4900. \\[2ex] \dfrac{x-4900}{150}, & \text{se} \quad 4900 \leq x < 5050. \\[2ex] 1, & \text{se} \quad x \geq 5050. \end{cases}$$

Exemplo: chegada de clientes

- A f.d.a. do tempo (em minutos) em que clientes chegam em uma lanchonete após 8h da manhã é:

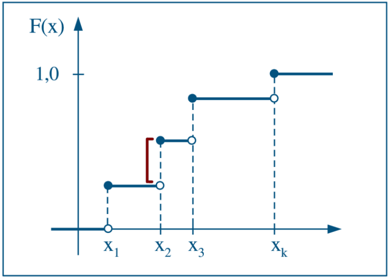
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0. \\ 1 - e^{-x/10}, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Qual a probabilidade do primeiro cliente chegar entre 8:15 e 8:30?

$$\begin{aligned} P(15 < X < 30) &= F(30) - F(15) \\ &= \left(1 - e^{-30/10}\right) - \left(1 - e^{-15/10}\right) \\ &= 0.1733. \end{aligned}$$

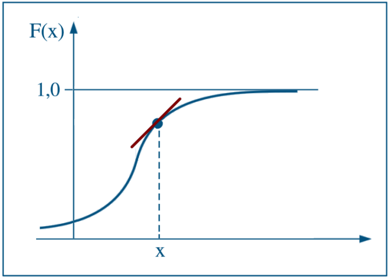
Relação entre $f(x)$ e $F(x)$

Distribuição discreta



$$P(X = x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Distribuição contínua



$$f(x) = \frac{\partial F}{\partial x}$$

Exemplo: chegada de clientes

- A f.d.a. do tempo (em minutos) em que clientes chegam em uma lanchonete após 8h da manhã é:

$$F(x) = \begin{cases} 1 \; - \; e^{-x/10}, & \text{se } x \geq 0. \\ 0, & \text{caso contrário }. \end{cases}$$

2. Encontre a função densidade de probabilidade de X.

$$f(x) \quad = \quad \frac{d\left(1 - e^{-x/10}\right)}{dx} \quad = \quad \frac{e^{-x/10}}{10}$$

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{e^{-x/10}}{10}, & \text{se } x \geq 0. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Referências

- Bussab, WO; Morettin, PA. Estatística Básica. São Paulo: Editora Saraiva, 2006 (5ª Edição).
- Magalhães, MN; Lima, ACP. Noções de Probabilidade e Estatística. São Paulo: EDUSP, 2008.

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DEST
Departamento
de Estatística