Variáveis Aleatórias

Parte 7

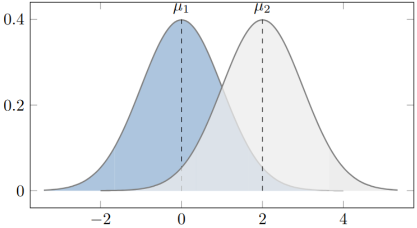
Prof.: Eduardo Vargas Ferreira

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

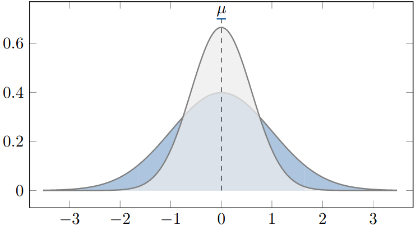
DEST
Departamento
de Estatística

Medidas de posição e dispersão

Medidas de posição



Medidas de dispersão



Exemplo: número de filhos

- Considere a frequência dos funcionários segundo o nº de filhos:

Nº de filhos x_i	Frequência n_i	Proporção f_i
0	4	0.20
1	5	0.25
2	7	0.35
3	3	0.15
5	1	0.05
Total	20	1.00

1. Qual a média do número de filhos?

$$\overline{x} = \frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1}{20}$$

$$= 0 \cdot \frac{4}{20} + 1 \cdot \frac{5}{20} + 2 \cdot \frac{7}{20} + 3 \cdot \frac{3}{20} + 5 \cdot \frac{1}{20} = 1.65$$

Média observada de X

Média observada de X: seja a variável aleatória discreta X, assumindo os valores $x_1, \ldots, x_p$, com as respectivas proporções observadas $f_1, \ldots, f_p$:

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_p
Proporção	f_1	f_2	f_3	$\cdots$	f_p

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_p \cdot f_p \\ &= \sum_{i=1}^{p} x_i \cdot f_i \end{aligned}$$

Esperança de uma variável aleatória

Esperança de uma variável aleatória

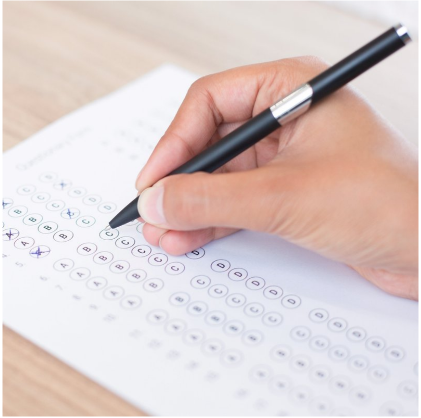
Esperança da v.a. X: seja a variável aleatória discreta X, assumindo os valores $x_1, \ldots, x_p$, com as respectivas probabilidades $p(x_1), \ldots, p(x_p)$:

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_p
Probabilidade	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$	$\cdots$	$p(x_p)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + \ldots + x_p \cdot p(x_p) \\ &= \sum_{i=1}^{p} x_i \cdot p(x_i)\end{aligned}$$

Exemplo: resposta de um questionário

- Considere X como a resposta em um questionário, assumindo os seguintes valores:



X	-2	-1	0	1	2
P(X = x)	0.1	0.3	0.2	0.1	0.3

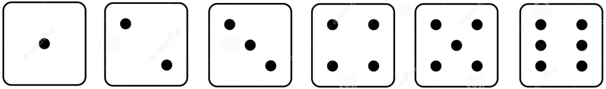
1. Qual a esperança de X?

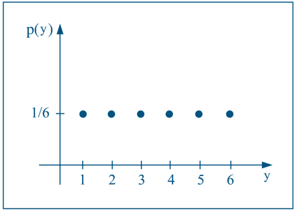
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-2)\cdot\frac{1}{10} + (-1)\cdot\frac{3}{10} + 0\cdot\frac{2}{10} + 1\cdot\frac{1}{10} + 2\cdot\frac{3}{10} \\ &= 0.2\end{aligned}$$

Exemplo: lançamento de um dado

- Considere o lançamento de um dado de 6 faces e defina a v.a.:

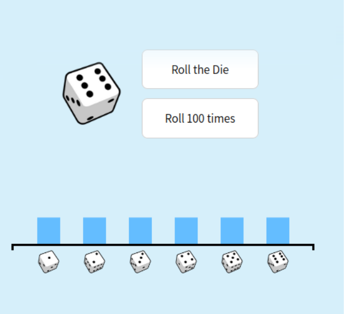
Y = valor observado no lançamento de um dado de 6 faces.

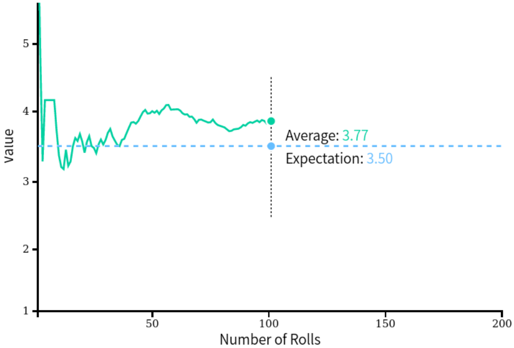




$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + \ldots + 6 \cdot p(6) \\
&= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} \\
&= 3,5.
\end{aligned}$$

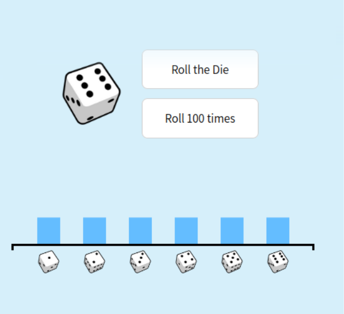
Exemplo: lançamento de um dado

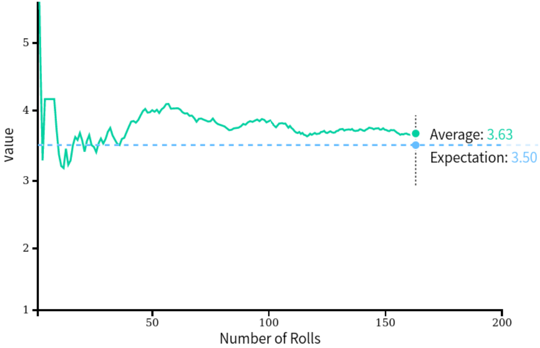




https://seeing-theory.brown.edu/basic-probability/index.html

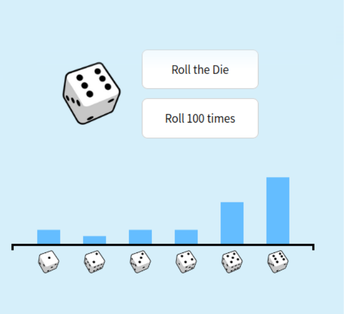
Exemplo: lançamento de um dado

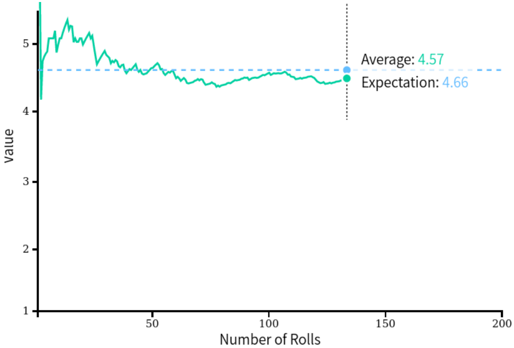




https://seeing-theory.brown.edu/basic-probability/index.html

Exemplo: lançamento de um dado





https://seeing-theory.brown.edu/basic-probability/index.html

Exemplo: central telefônica

- Numa central telefônica, o número de chamadas (por minuto) chega segundo a seguinte distribuição:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-8} \cdot 8^x}{x!}, & \text{se } x = 0, 1, 2 \ldots \\ 0, & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

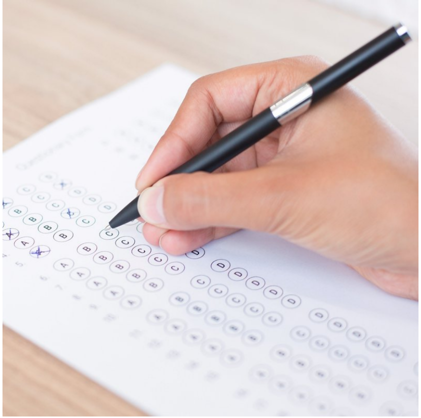
1. Qual a esperança da v.a. $X =$ nº de chamadas por minuto.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 0 \cdot \frac{e^{-8} \cdot 8^0}{0!} + 1 \cdot \frac{e^{-8} \cdot 8^1}{1!} + 2 \cdot \frac{e^{-8} \cdot 8^2}{2!} + \ldots \\ &= 8 \end{aligned}$$

Algumas propriedades da Esperança

Exemplo: resposta de um questionário

- Considere X como a resposta em um questionário, assumindo os seguintes valores:



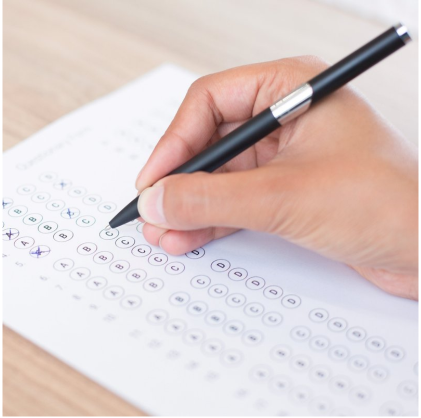
X	-2	-1	0	1	2
$2X$	-4	-2	0	2	4
$P(X = x)$	0.1	0.3	0.2	0.1	0.3

2. Qual a esperança de $2X$?

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(2X) &= (-4)\cdot\frac{1}{10} + (-2)\cdot\frac{3}{10} + \ldots + 4\cdot\frac{3}{10} \\
&= 2x_1 \cdot p(x_1) + 2x_2 \cdot p(x_2) + \ldots + 2x_5 \cdot p(x_5) \\
&= 2 \cdot \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot p(x_i) \\
&= 2 \cdot \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

Exemplo: resposta de um questionário

- Considere X como a resposta em um questionário, assumindo os seguintes valores:



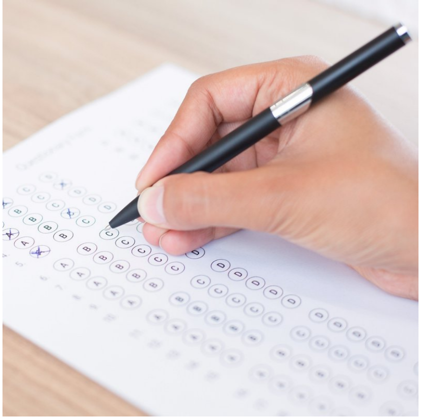
X	-2	-1	0	1	2
$X-5$	-7	-6	-5	-4	-3
$P(X = x)$	0.1	0.3	0.2	0.1	0.3

3. Qual a esperança de $X - 5$?

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X-5) &= (-7)\cdot\frac{1}{10} + (-6)\cdot\frac{3}{10} + \ldots + (-3)\cdot\frac{3}{10} \\
&= (x_1-5)\cdot p_1 + (x_2-5)\cdot p_2 + \ldots + (x_5-5)\cdot p_5 \\
&= \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot p(x_i) - 5\cdot\left(\sum_{i=1}^{5} p(x_i)\right) \\
&= \mathbb{E}(X) - 5
\end{aligned}
$$

Exemplo: resposta de um questionário

- Considere X como a resposta em um questionário, assumindo os seguintes valores:



X	-2	-1	0	1	2
X^2	4	1	0	1	4
$P(X = x)$	0.1	0.3	0.2	0.1	0.3

4. Qual a esperança de X^2?

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= 4 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{3}{10} + \ldots + 4 \cdot \frac{3}{10} \\ &= x_1^2 \cdot p(x_1) + x_2^2 \cdot p(x_2) + \ldots + x_5^2 \cdot p(x_5) \\ &= \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \cdot p(x_i)\end{aligned}$$

Algumas propriedades da Esperança

$$\mathbb{E}\,[\,a \cdot X + b\,] = a \cdot \mathbb{E}\,[X] + b$$

Definição: Dada a v.a. discreta X e a respectiva função de probabilidade $p(x)$, a esperança matemática da função $h(X)$ é dada por:

$$\mathbb{E}\,[\,h(X)\,] = \sum_{i=1}^{n} h(x_i) \cdot p(x_i)$$

$$\mathbb{E}\,[2X] = \sum_{i=1}^{5} 2x_i \cdot p(x_i)$$

$$\mathbb{E}\,[X-5] = \sum_{i=1}^{5} (x_i - 5) \cdot p(x_i)$$

$$\mathbb{E}\,[X^2] = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \cdot p(x_i)$$

Referências

- Bussab, WO; Morettin, PA. Estatística Básica. São Paulo: Editora Saraiva, 2006 (5ª Edição).
- Magalhães, MN; Lima, ACP. Noções de Probabilidade e Estatística. São Paulo: EDUSP, 2008.

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEST
Departamento de Estatística