Variáveis Aleatórias

Parte 8

Prof.: Eduardo Vargas Ferreira

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEST
Departamento de Estatística

Propriedades da Esperança

$$\mathbb{E}\left[\, a \cdot X + b \,\right] = a \cdot \mathbb{E}\left[X\right] + b$$

Definição: Dada a v.a. discreta X e a respectiva função de probabilidade $p(x)$, a esperança matemática da função $h(X)$ é dada por:

$$\mathbb{E}\left[\, h(X) \,\right] = \sum_{i=1}^{n} h(x_i) \cdot p(x_i)$$

$$\mathbb{E}\left[2X\right] = \sum_{i=1}^{5} 2x_i \cdot p(x_i)$$

$$\mathbb{E}\left[X - 5\right] = \sum_{i=1}^{5} (x_i - 5) \cdot p(x_i)$$

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \cdot p(x_i)$$

Exemplo: agressividade do câncer

- Seja X o grau de agressividade de um câncer, com suas respectivas probabilidades de ocorrência.

X	1	2	3
$P(\ X = x\ )$	$1/2$	$1/4$	$1/4$

1. Calcule $\mathbb{E}(X)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + x_3 \cdot p(x_3) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} \\ &= 1.75 \end{aligned}$$

Exemplo: agressividade do câncer

- Seja X o grau de agressividade de um câncer, com suas respectivas probabilidades de ocorrência.

X	1	2	3
$P(\ X = x\ )$	1/2	1/4	1/4

2. Calcule $\mathbb{E}(X^2)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^2\right] &= x_1^2 \cdot p(x_1) + x_2^2 \cdot p(x_2) + x_3^2 \cdot p(x_3) \\
&= 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{1}{4} \\
&= 3.75
\end{aligned}$$

Exemplo: agressividade do câncer

- Seja X o grau de agressividade de um câncer, com suas respectivas probabilidades de ocorrência.

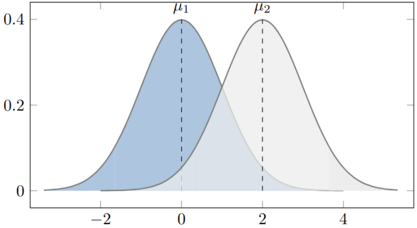
X	1	2	3
$P(X = x)$	$1/2$	$1/4$	$1/4$

3. Calcule $\mathbb{E}(Y)$, em que $Y = (X - a)^2$.

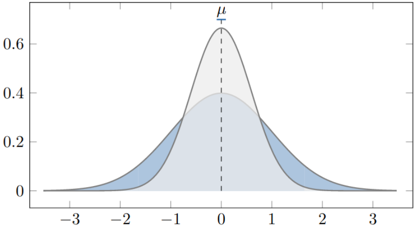
$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X-a)^2\right] &= \mathbb{E}\left[X^2 - 2Xa + a^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[2Xa\right] + \mathbb{E}\left[a^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2a\mathbb{E}\left[X\right] + a^2 \\
&= 3.75 - 2a1.75 + a^2
\end{aligned}
$$

Medidas de posição e dispersão

Medidas de posição



Medidas de dispersão



Variância observada de X

Exemplo: número de filhos

- Considere a frequência dos funcionários segundo o nº de filhos:

Nº de filhos x_i	Frequência n_i	Proporção f_i
0	4	0.20
1	5	0.25
2	7	0.35
3	3	0.15
5	1	0.05
Total	20	1.00

1. Encontre a variância do número de filhos, sabendo que $\overline{x} = 1.65$.

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i \\
&= (0 - 1,65)^2 \cdot \frac{4}{20} + (1 - 1,65)^2 \cdot \frac{5}{20} + \ldots + (5 - 1,65)^2 \cdot \frac{1}{20}
\end{aligned}
$$

Variância observada de X

Variância observada de X: seja a variável aleatória discreta X, assumindo os valores $x_1, \ldots, x_p$, com as respectivas proporções observadas $f_1, \ldots, f_p$:

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_p
Proporção	f_1	f_2	f_3	$\cdots$	f_p

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= (x_1 - \overline{x})^2 \cdot f_1 + (x_2 - \overline{x})^2 \cdot f_2 + \ldots + (x_p - \overline{x})^2 \cdot f_p \\
&= \sum_{i=1}^{p} (x_i - \overline{x})^2 \cdot f_i
\end{aligned}
$$

Variância de uma variável aleatória

Variância de uma variável aleatória

Variância da v.a. X**:** seja a variável aleatória discreta X, assumindo os valores $x_1, \ldots, x_p$, com as respectivas probabilidades $p(x_1), \ldots, p(x_p)$:

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_p
Probabilidade	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$	$\cdots$	$p(x_p)$

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= [\, x_1 - \mathbb{E}(X) \,]^2 \cdot p(x_1) \;+\; [\, x_2 - \mathbb{E}(X) \,]^2 \cdot p(x_2) \;+\; \ldots \;+\; [\, x_p - \mathbb{E}(X) \,]^2 \cdot p(x_p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [\, x_i - \mathbb{E}(X) \,]^2 \cdot p(x_i)
\end{aligned}
$$

Variância de uma variável aleatória

- Assim, chamamos de variância da v.a. X a seguinte quantidade:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}ar(X) &= \sum_{i=1}^{n} [\ x_i - \mathbb{E}(X)\ ]^2 \cdot p(x_i) \qquad \left(\mathbb{E}\ [\ h(X)\ ] = \sum_{i=1}^{n} h(x_i) \cdot p(x_i) \right) \\
&= \mathbb{E}\left[(\ X - \mathbb{E}[X]\ )^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^2 \quad - \quad 2X \cdot \mathbb{E}\ [X] \quad + \quad \mathbb{E}\ [X]^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^2\right] \quad - \quad 2\mathbb{E}\ [X] \cdot \mathbb{E}\ [X] \quad + \quad \mathbb{E}\ [X]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[X^2\right] \quad - \quad 2\mathbb{E}\ [X]^2 \quad + \quad \mathbb{E}\ [X]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[X^2\right] \quad - \quad \mathbb{E}\ [X]^2
\end{aligned}
$$

Exemplo: tempo de solda

- O tempo T, em minutos, necessário para um operário soldar uma peça tem a seguinte *d.p.*:

T	2	3	4	5	6	7
$P(\ T = t\ )$	0.1	0.1	0.3	0.2	0.2	0.1

1. Calcule o tempo médio de soldagem de cada peça.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[T\right] &= t_1 \cdot p(t_1) + t_2 \cdot p(t_2) + t_3 \cdot p(t_3) + \ldots + t_6 \cdot p(t_6) \\
&= 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 + \ldots + 7 \cdot 0,1 \\
&= 4,6.
\end{aligned}
$$

Exemplo: tempo de solda

- O tempo T, em minutos, necessário para um operário soldar uma peça tem a seguinte *d.p.*:

T	2	3	4	5	6	7
$P(\ T = t\ )$	0.1	0.1	0.3	0.2	0.2	0.1

2. Calcule a variância da v.a. T.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[T^2\right] &= t_1^2 \cdot p(t_1) + t_2^2 \cdot p(t_2) + t_3^2 \cdot p(t_3) + \ldots + t_6^2 \cdot p(t_6) \\
&= 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,1 + 16 \cdot 0,3 + \ldots + 49 \cdot 0,1 \\
&= 23,2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar\left[T\right] &= \mathbb{E}\left[T^2\right] - \mathbb{E}\left[T\right]^2 = 23,2 - 21.16 \\
&= 2,04.
\end{aligned}$$

Exemplo: venda de marmita

- Seja a **Empresa A** que comercializa um produto altamente perecível. Para cada unidade vendida, a empresa tem um custo de R$2,00 e recebe R$8,00 reais.

- Sabendo que a probabilidade de um produto ser vendido antes da validade é de 90%, quanto a empresa espera lucrar em uma unidade do produto?

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X\right] &= R\$6,00 \times 0,9 \;+\; (-R\$2,00) \times 0,1 \\ &= R\$5,20.\end{aligned}$$

Exemplo: venda de marmita

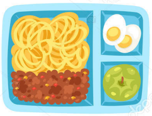
- Seja a **Empresa B** que comercializa um produto altamente perecível. Para cada unidade vendida, a empresa tem um custo de R\$2,00 e recebe R\$9,00 reais.

- Sabendo que a probabilidade de um produto ser vendido antes da validade é de **80**%, quanto a empresa espera lucrar em uma unidade do produto?

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= R\$7,00 \times 0,8 \; + \; (-R\$2,00) \times 0,2 \\ &= R\$5,20.\end{aligned}$$

Empresa A vs Empresa B

$$\mathbb{E}\left[X\right] = R\$5,20$$

Custo R$2,00  Venda R$8,00

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^2\right] &= x_1^2 \cdot p(x_1) + x_2^2 \cdot p(x_2) \\
&= 6^2 \cdot 0,9 + (-2)^2 \cdot 0,1 = 32,8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar\left[X\right] &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[X\right]^2 \\
&= 32,8 - 5,2^2 \\
&= 5,76.
\end{aligned}$$

Custo R$2,00  Venda R$9,00

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^2\right] &= x_1^2 \cdot p(x_1) + x_2^2 \cdot p(x_2) \\
&= 7^2 \cdot 0,8 + (-2)^2 \cdot 0,2 = 40
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar\left[X\right] &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[X\right]^2 \\
&= 40 - 5,2^2 \\
&= 12,96.
\end{aligned}$$

Algumas propriedades da variância

- **Propriedades da esperança:**

$$\mathbb{E}\left[\, a \cdot X + b \,\right] = a \cdot \mathbb{E}\left[X\right] + b$$

- **Propriedades da variância:**

$$\mathbb{V}ar\left[a \cdot X + b\right] = a^2 \cdot \mathbb{V}ar\left[X\right]$$

Referências

- Bussab, WO; Morettin, PA. Estatística Básica. São Paulo: Editora Saraiva, 2006 (5ª Edição).
- Magalhães, MN; Lima, ACP. Noções de Probabilidade e Estatística. São Paulo: EDUSP, 2008.