Variáveis Aleatórias

Parte 9

Prof.: Eduardo Vargas Ferreira

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DEST
Departamento de Estatística

Esperança e variância de uma v.a. contínua

Esperança de uma v.a. contínua

- Dada a v.a. X, chamamos de esperança de X a seguinte quantidade:

$$\overbrace{\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i)}^{\textbf{Distribuição discreta}} \qquad \overbrace{\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\ dx}^{\textbf{Distribuição contínua}}$$

$$\mathbb{E}\left[\, a \cdot X + b \,\right] = a \cdot \mathbb{E}\left[X\right] + b$$

Exemplo: tempo até a chegada do próximo trem

- Seja X o tempo, em minutos, de espera até a chegada do próximo trem, com $f.d.p.$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{k}, & \text{se } 1 < x < 3 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

1. Calcule o valor de k.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \underbrace{\int_{1}^{3} \frac{x-1}{k}\,dx}_{\downarrow} + \int_{3}^{\infty} 0\,dx \quad = \quad 1$$

$$\frac{1}{k}\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_{1}^{3} = 1 \quad \to \quad k = 2$$

Exemplo: tempo até a chegada do próximo trem

- Seja X o tempo, em minutos, de espera até a chegada do próximo trem, com $f.d.p.$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{k}, & \text{se } 1 < x < 3 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

2. Calcule o valor esperado de X.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_{1}^{3} x \cdot \frac{x-1}{2}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{3} \\ &= 2.33. \end{aligned}$$

Variância de uma v.a. contínua

- A extensão do conceito de variância para v.a. contínuas é feita de maneira semelhante, chegando em:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar(X) &= \mathbb{E}\left[\, (X - \mathbb{E}\,[X]\,)^2\,\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}\,[X]\,)^2 \cdot f(x)\; dx \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] \;-\; \mathbb{E}\,[X]^2. \end{aligned}$$

$$\mathbb{V}ar\;[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \mathbb{V}ar\;[X]$$

Exemplo: tempo até a chegada do próximo trem

- Seja X o tempo, em minutos, de espera até a chegada do próximo trem, com $f.d.p.$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{k}, & \text{se } 1 < x < 3 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

3. Calcule o valor esperado de X^2.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X^2\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx = \int_1^3 x^2 \cdot \frac{x-1}{2}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3 \\ &= 5.66. \end{aligned}$$

Exemplo: tempo até a chegada do próximo trem

- Seja X o tempo, em minutos, de espera até a chegada do próximo trem, com $f.d.p.$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{k}, & \text{se } 1 < x < 3 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

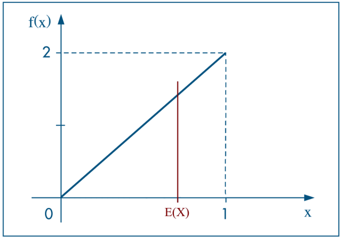
4. Calcule a variância de X.

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar\,[X] &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(X\right)^2 \\ &= 5.66 - 2.33^2 \\ &= 0.23 \end{aligned}$$

Exemplo: demanda de água potável

- A demanda semanal de água potável de uma cadeia de lojas, em milhares de litros, é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 < x < 1. \\ 0, & \text{caso contrário .} \end{cases}$$



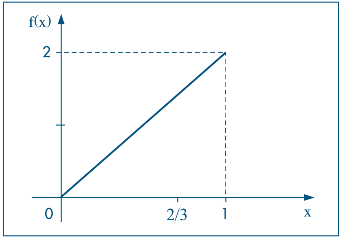
1. Calcule a esperança de X.

$$\mathbb{E}\,[X] = \int_0^1 x \cdot 2x \; dx = 2 \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1$$
$$= \frac{2}{3}$$

Exemplo: demanda de água potável

- A demanda semanal de água potável de uma cadeia de lojas, em milhares de litros, é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 < x < 1. \\ 0, & \text{caso contrário }. \end{cases}$$



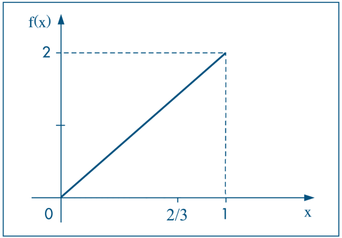
2. Calcule a esperança de X^2.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X^2\right] &= \int_0^1 x^2 \cdot 2x \; dx = 2 \cdot \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Exemplo: demanda de água potável

- A demanda semanal de água potável de uma cadeia de lojas, em milhares de litros, é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 < x < 1. \\ 0, & \text{caso contrário} . \end{cases}$$



3. Calcule a variância de X.

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar\,[X] &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\,[X]^2 \\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0.05. \end{aligned}$$

Referências

- Bussab, WO; Morettin, PA. Estatística Básica. São Paulo: Editora Saraiva, 2006 (5ª Edição).
- Magalhães, MN; Lima, ACP. Noções de Probabilidade e Estatística. São Paulo: EDUSP, 2008.

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DEST
Departamento
de Estatística