Distribuições de probabilidade discretas

Parte 1

Prof.: Eduardo Vargas Ferreira

Exemplo: seleção de candidatos

- Uma dinâmica selecionará 5 candidatos para a próxima fase. A distribuição de probabilidade do nº de homens escolhidos é dada por:

X = número de homens selecionados.

$$p(x) = \begin{cases} \binom{5}{x} 0,2^x \cdot 0,8^{5-x}, & \text{se } x \in \mathbb{N} \leq 5 \\ 0, & \text{caso contrário} . \end{cases}$$

X	0	1	2	3	4	5
P(X = x)	0.327	0.409	0.204	0.051	0.006	0.000

Exemplo: número de erros de impressão

- Suponha que o número de erros tipográficos em uma página de livro tenha a seguinte distribuição:

X = número de erros na página

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-0.5} \cdot 0.5^{x}}{x!}, & \text{se } x = 0, 1, 2 \ldots \\ 0, & \text{caso contrário} . \end{cases}$$

X	0	1	2	3	$\cdots$
$P(\ X = x\ )$	0.60	0.30	0.07	0.01	$\cdots$

As principais distribuições de probabilidade

Discretas

- **Uniforme Discreta;**
- **Bernoulli;**
- **Binomial;**
- Hipergeométrica.
- Poisson;
- Geométrica;
- Binomial negativa;

Contínuas

- Uniforme Contínua;
- Exponencial;
- Normal;
- Lognormal;
- Gama;
- Weibull;
- Beta.

Distribuição uniforme discreta

Exemplo: sorteio da Mega Sena

- Os números do próximo sorteio da Mega Sena.

Exemplo: placa de um veículo

- O último digito da placa de um veículo.

Distribuição uniforme discreta

Definição: A v.a. discreta X, assumindo os valores $x_1, \ldots, x_k$, tem distribuição uniforme se, e somente se:

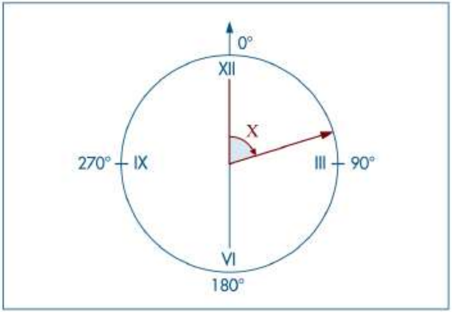
$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & \text{se } x \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ 0, & \text{caso contrário} \ . \end{cases}$$

Notação: $X \sim U(1, 2, \ldots, n)$.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i \qquad e \qquad \mathbb{V}ar(X) = \frac{1}{k}\left\{\sum_{i=1}^{k} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)^2}{k}\right\}$$

Exemplo: relógio mecânico

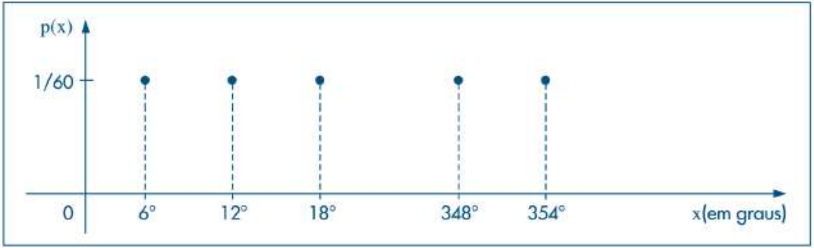
- O ponteiro dos segundos de um relógio mecânico pode parar a qualquer instante, devido a algum defeito técnico ou término da bateria.



X = ângulo entre o XII e o ponteiro dos segundos.

Exemplo: relógio mecânico

X	$0°$	$6°$	$12°$	$18°$	$\cdots$	$348°$	$354°$
$P(\ X = x\ )$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\cdots$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$



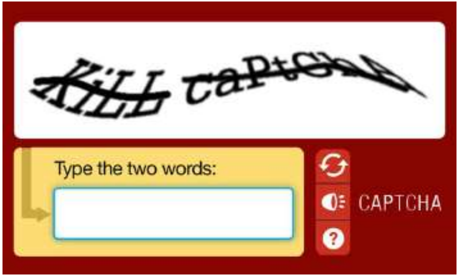
Distribuição de Bernoulli

Exemplo: conversão e anúncio em venda

- Um anúncio apresentado a um cliente é convertido em venda (**sucesso**) ou não (**fracasso**).

Exemplo: resolver um CAPTCHA

- Se um robô consegue resolver um CAPTCHA, se sim = **sucesso**, se não = **fracasso**.



Distribuição de Bernoulli

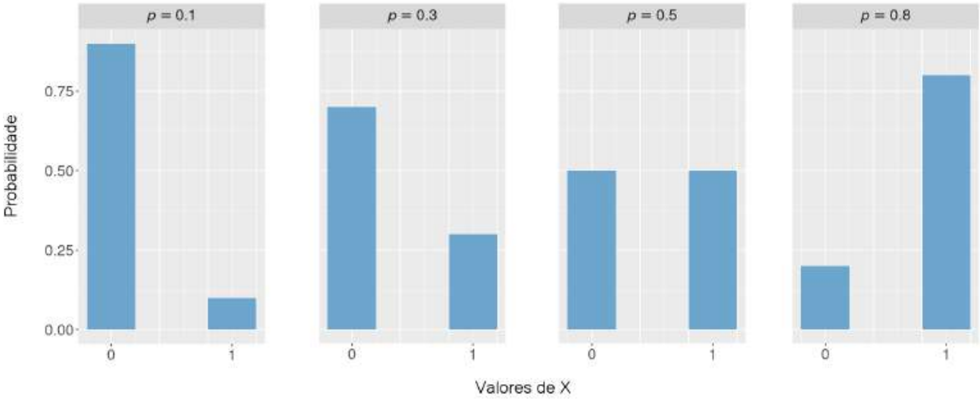
Definição: A variável aleatória tem distribuição de Bernoulli se o resultado do experimento apresenta apenas **dois desfechos possíveis**, representados por 1 (sucesso) e 0 (fracasso).

$$p(x) = \begin{cases} p, & \text{se } x = 1 \ \textbf{(sucesso)} \\ 1 - p, & \text{se } x = 0 \ \textbf{(fracasso)} \end{cases}$$

Notação: $X \sim Ber(p)$.

$$\mathbb{E}(X) = p \qquad e \qquad \mathbb{V}ar(X) = p \cdot (1 - p)$$

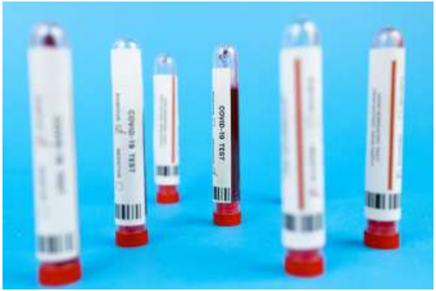
Gráficos da distribuição de Bernoulli



Outros exemplos

1. O paciente ser diagnosticado com Covid-19:

$$p(x) = \begin{cases} 0.23, & \text{se } x = 1 \ \textbf{(positivo)} \\ 0.77, & \text{se } x = 0 \ \textbf{(negativo)} \end{cases}$$



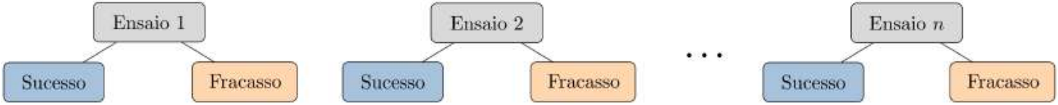
2. O réu ser condenado após o julgamento.

$$p(x) = \begin{cases} 0.8, & \text{se } x = 1 \ \textbf{(culpado)} \\ 0.2, & \text{se } x = 0 \ \textbf{(inocente)} \end{cases}$$

Distribuição Binomial

Distribuição Binomial

- Temos **n** tentativas independentes, cada uma com probabilidade de sucesso p e de fracasso $1 - p$, tq:



1. Os ensaios sejam independentes;
2. Apresentem apenas dois resultados possíveis;
3. A probabilidade em cada ensaio permanece constante.

Exemplo: lances livre

- De três arremessos livre, soma-se o número de acertos.

1. São lances independentes;
2. Dois resultados possíveis;
3. Mesma probabilidade de acerto.

Distribuição Binomial

Definição: A variável aleatória X, que corresponde ao número total de sucessos em n ensaios de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, $0 < p < 1$, tem $f.p$ dada por:

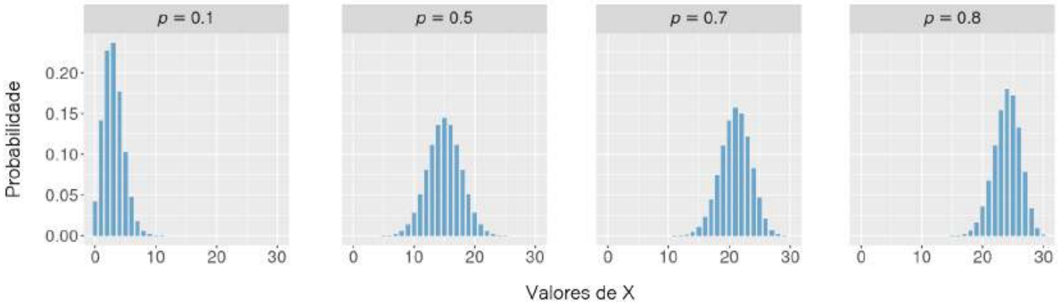
$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & \text{se } x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0, & \text{caso contrário} . \end{cases}$$

Notação: $X \sim Bin(n, p)$.

$$\mathbb{E}(X) \; = \; n \cdot p \qquad e \qquad \mathbb{V}ar(X) \; = \; n \cdot p \cdot (1-p)$$

Gráficos da distribuição Binomial

X = número de sucesso em 30 realizações.



Exemplo: seleção de candidatos

- Uma dinâmica selecionará 5 candidatos para a próxima fase. A distribuição de probabilidade do nº de homens escolhidos é dada por:

X = número de homens selecionados.

$$p(x) = \begin{cases} \binom{5}{x} 0,2^{x} \cdot 0,8^{5-x}, & \text{se } x \in \mathbb{N} \leq 5 \\ 0, & \text{caso contrário} . \end{cases}$$

X	0	1	2	3	4	5
P(X = x)	0.327	0.409	0.204	0.051	0.006	0.000

Exemplo: carretéis com avaria

- Um inspetor de qualidade escolhe 10 carretéis aleatoriamente para avaliação. Sabe-se que:

X = nº de carretéis defeituosos dos 10 disponíveis.

$$\begin{cases} 72\% \text{ dos carretéis não tem avaria } \textbf{(fracasso)} \\ 28\% \text{ dos carretéis têm algum problema } \textbf{(sucesso)}. \end{cases}$$

1. Qual a probabilidade de que menos de 2 tubos tenham problema?

$$P(X < 2) \quad = \quad \binom{10}{0} 0.28^0 (1-0.28)^{10-0} + \binom{10}{1} 0.28^1 (1-0.28)^{10-1}$$

Exemplo: ovos danificados

- Número de ovos danificados em uma caixa com meia dúzia de ovos.

X = nº de ovos danificados de 6 disponíveis.

$$p(x) = \begin{cases} \binom{6}{x} p^x (1-p)^{6-x}, & \text{se } x = 0, 1, \ldots, 6 \\ 0, & \text{caso contrário} . \end{cases}$$

Exemplo: ovos danificados

- Número de ovos danificados em uma caixa com meia dúzia de ovos.

1. Os ovos tem a mesma resistência a impactos?
2. Todas as posições na caixa oferecem mesmo risco de quebrar?
3. Eles quebram de forma independente ou existe dependência espacial?

Referências

- Bussab, WO; Morettin, PA. Estatística Básica. São Paulo: Editora Saraiva, 2006 (5ª Edição).
- Magalhães, MN; Lima, ACP. Noções de Probabilidade e Estatística. São Paulo: EDUSP, 2008.