Distribuições de probabilidade contínuas

Parte 1

Prof.: Eduardo Vargas Ferreira

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DEST
Departamento de Estatística

As principais distribuições de probabilidade

Discretas

- Uniforme Discreta;
- Bernoulli;
- Binomial;
- Hipergeométrica.
- Poisson;
- Geométrica;
- Binomial negativa;

Contínuas

- **Uniforme Contínua;**
- **Exponencial;**
- Normal;
- Lognormal;
- Gama;
- Weibull;
- Beta.

Modelo Uniforme

Modelo Uniforme

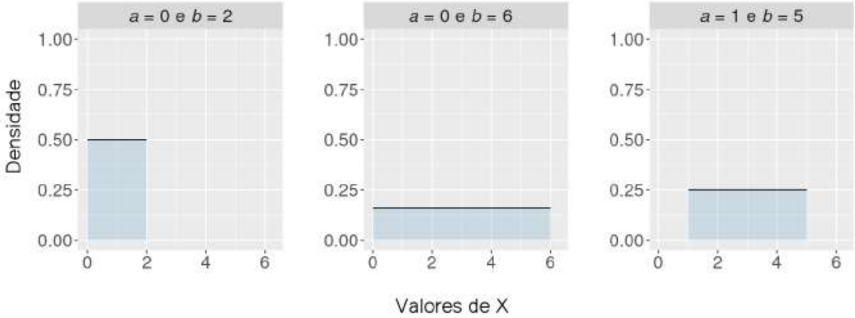
Definição: A v.a. X tem distribuição uniforme no intervalo [α, β] se sua *f.d.p.* é dada por:

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \text{se } \alpha \leq x \leq \beta. \\ 0, & \text{caso contrário }. \end{cases}$$

Notação: $X \sim U(\alpha, \beta)$.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha + \beta}{2} \qquad \mathbb{V}ar(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

Gráficos da distribuição Uniforme



Discuta a validade do modelo uniforme nos seguintes casos

1. O ponto de ruptura do fio de uma linha de transmissão de eletricidade.

Discuta a validade do modelo uniforme nos seguintes casos

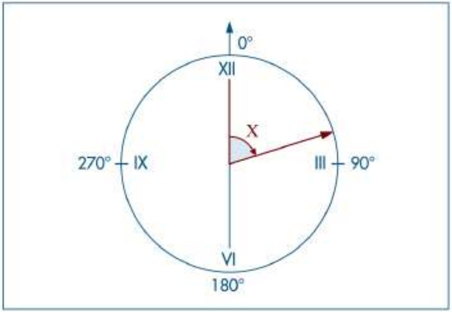
2. O local onde ocorre mais acidentes ao longo de uma estrada.

Discuta a validade do modelo uniforme nos seguintes casos

3. A posição do ponteiro dos minutos quando acaba a pilha de um relógio.

Exemplo: relógio mecânico

- O ponteiro dos segundos de um relógio mecânico pode parar a qualquer instante, devido a algum defeito técnico ou término da bateria.

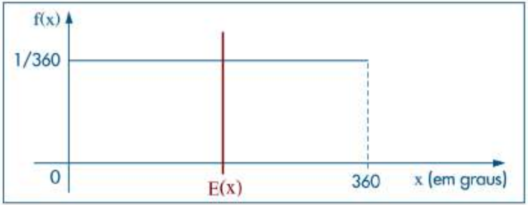


$X =$ ângulo entre o XII e o ponteiro dos segundos.

Exemplo: relógio mecânico

- Temos a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0^o. \\ \dfrac{1}{360}, & \text{se } 0^o \leq x \leq 360^o. \\ 0, & \text{se } x > 360^o. \end{cases}$$



- Já a esperança é dada por:

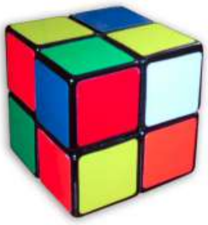
$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{360} x \cdot \frac{1}{360}\, dx = \frac{1}{360} \frac{x^2}{2}\bigg|_0^{360} = 180$$

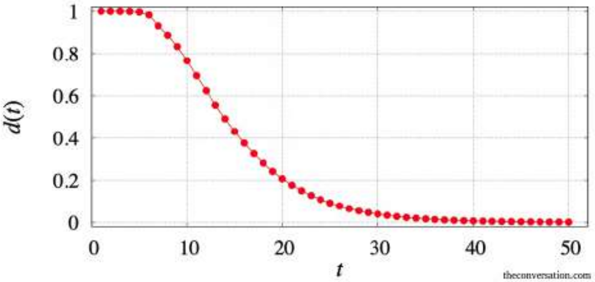
Exemplo: geração de números aleatórios

- Embaralhar as canções da sua playlist.

Exemplo: quão difícil é embaralhar o cubo mágico

- Este cubo tem apenas 3.674.160 estados possíveis, e seu "God's number" é 11. Ou seja, pode ser resolvido com 11 movimentos ou menos, dependendo do estado inicial.





- $d(t)$ representa o quanto a distribuição das cores difere da distribuição uniforme, após t movimentos.

Exemplo: envase de detergente

- O volume envasado de detergente líquido tem distribuição Uniforme, tal que $4900 \leq x \leq 5050$ ml.

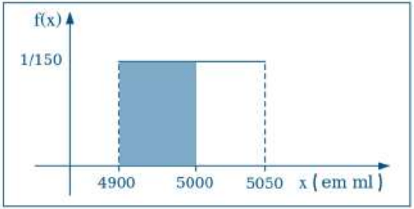
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5050 - 4900}, & \text{se } \; 4900 \leq x < 5050. \\[2ex] 0, & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

1. Qual a proporção de embalagens com menos de 5000 ml?

$$\begin{aligned} P(X < 5000) &= \int_{4900}^{5000} \frac{1}{5050 - 4900} \, dx \\ &= 0.667 \end{aligned}$$

Exemplo: envase de detergente

- O volume envasado de detergente líquido tem distribuição Uniforme, tal que $4900 \leq x \leq 5050$ ml.



1. Qual a proporção de embalagens com menos de 5000 ml?

$$
\begin{aligned}
P(X < 5000) &= \int_{4900}^{5000} \frac{1}{5050 - 4900} \, dx \\
&= 0.667
\end{aligned}
$$

Modelo Exponencial

Distribuições Poisson e Exponencial

- Considere a situação na qual clientes chegam ao caixa eletrônico a uma taxa de 4 pessoas por hora.

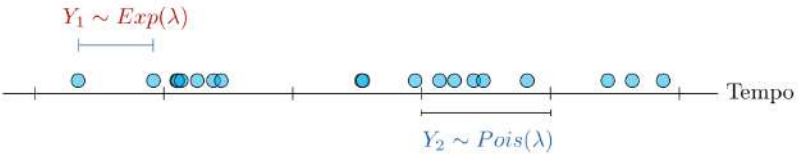
- **Distribuição Poisson:** conta o nº de ocorrências num intervalo;

$$X = \textbf{número de clientes em uma hora.}$$

- **Distribuição Exponencial:** descreve o tempo entre ocorrências.

$$Y = \textbf{tempo até a chegada de um novo cliente.}$$

Distribuições Poisson e Exponencial



Poisson

- Lida com o número de ocorrências dentro de um período.
- Probabilidade de que 3 clientes cheguem nos próximos 15 min.

Exponencial

- Lida com o tamanho do intervalo entre duas ocorrências sucessivas;
- Probabilidade do tempo até a chegada do novo cliente supere 10 min.

Exemplo: tempo até a falha

- Tempo até a falha de uma máquina industrial.

Exemplo: inadimplência no cartão de crédito

- O tempo até a inadimplência no pagamento do cartão de crédito.

Exemplo: mutações no DNA

- A distância entre mutações em uma fita de DNA

zhangshuang/Getty Images

Modelo Exponencial

Definição: A v.a. X tem distribuição exponencial com parâmetro $\beta > 0$ se sua $f.d.p.$ tem a forma:

$$f(x;\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, & \text{se } x \geq 0. \\ 0, & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

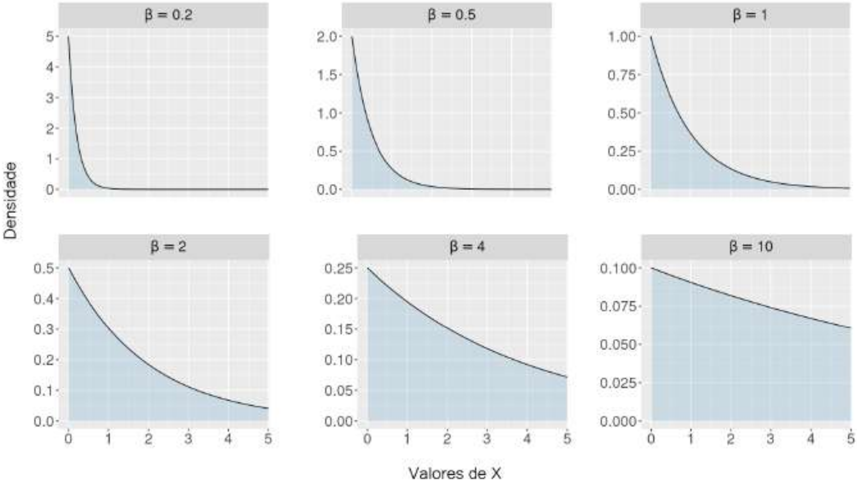
Notação: $X \sim Exp(\beta)$.

$$\mathbb{E}(X) = \beta \qquad \mathbb{V}ar(X) = \beta^2$$

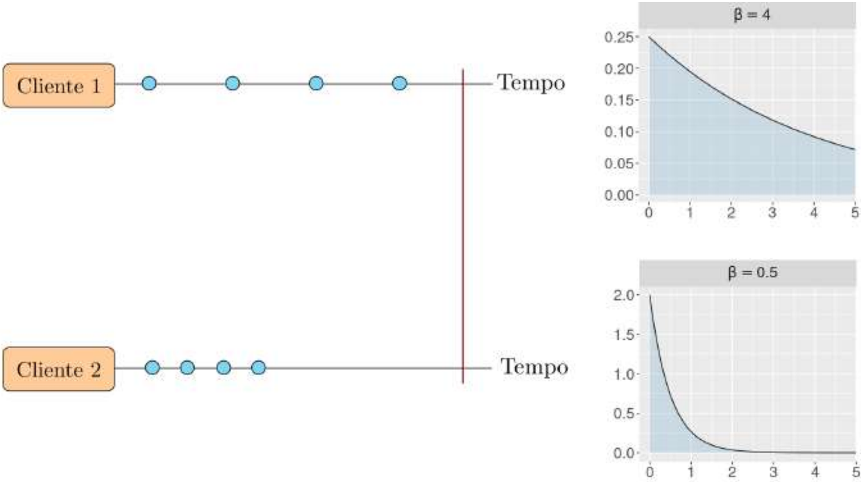
$\downarrow$

Comprimento médio do intervalo entre as ocorrências.

Gráfico da distribuição Exponencial



Exemplo: probabilidade de perder um cliente



Exemplo: chegada de clientes

- A f.d.p. do tempo (em minutos) em que clientes chegam em uma lanchonete após 8h da manhã é

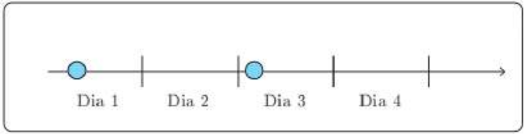
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/10}}{10}, & \text{se } x \geq 0. \\ 0, & \text{caso contrário} . \end{cases}$$

1. Qual a probabilidade do primeiro cliente chegar entre 8:15 e 8:30?

$$\begin{aligned} P(15 < X < 30) &= \int_{15}^{30} \frac{e^{-x/10}}{10}\, dx \\ &= 0.1733. \end{aligned}$$

Exemplo: serviço de suporte técnico

- O número de chamadas para um serviço de suporte técnico tem distribuição de Poisson com média de $0,5$ chamadas por dia.



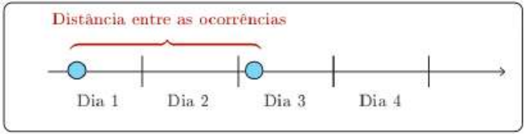
X = nº de chamadas em dois dias.

1. Qual a probabilidade de não haver chamadas nos próximos 2 dias?

$$P(X=0) \quad = \quad \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^0}{0!} \quad = \quad \frac{e^{-1}1^0}{0!} \quad = \quad 0.3679$$

Exemplo: serviço de suporte técnico

- O número de chamadas para um serviço de suporte técnico tem distribuição de Poisson com média de $0,5$ chamadas por dia.



Y = tempo até a próxima chamada.

1. Qual a probabilidade de não haver chamadas nos próximos 2 dias?

$$P(Y > 2) = 1 - \int_0^2 \frac{1}{2} e^{-y/2}\, dy = 0.3679$$

Referências

- Bussab, WO; Morettin, PA. Estatística Básica. São Paulo: Editora Saraiva, 2006 (5ª Edição).
- Magalhães, MN; Lima, ACP. Noções de Probabilidade e Estatística. São Paulo: EDUSP, 2008.