Tamanho de amostra

Parte 1

Prof.: Eduardo Vargas Ferreira

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DEST Departamento de Estatística

Resumindo o que vimos

Intervalo de confiança para média

$$\mathrm{P}\left(z_1 < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_2 \right) = 1-\alpha. \qquad \mathrm{P}\left(t_1 < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_2 \right) = 1-\alpha. \qquad \mathrm{P}\left(z_1 < \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} < z_2 \right) = 1-\alpha.$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$N(0,1) \qquad\qquad t_{n-1} \qquad\qquad N(0,1)$$

Intervalo de confiança para variância

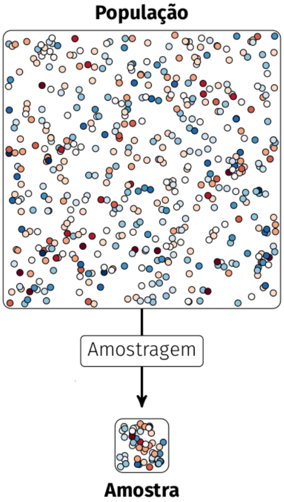
$$\mathrm{P}\left(q_1 < (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} < q_2 \right) = 1-\alpha.$$

$$\downarrow$$

$$\chi^2_{n-1}$$

Tamanho de amostra

Por que dimensionar amostras?



- Dimensionar esforço, economizar recursos.
- Planejar pesquisas de opinião pública.
- Controle de qualidade.
- Estudos demográficos.
- Avaliação de potencial de pesca.
- Testes de medicamentos.

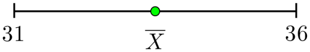
Exemplo: novo empreendimento

Exemplo: idade média dos clientes

Pergunta 1

Idade média dos clientes?

Coletou-se uma amostra obtendo o seguinte IC:



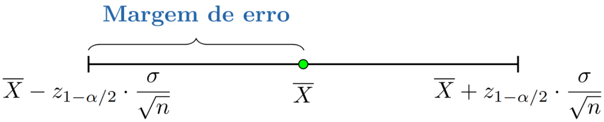
- A fim de definir qual a melhor ambientação para o restaurante, ter encontrado $\bar{x} = 33$ anos, me fornece condições para acreditar que $\mu < 30$?

Margem de erro

- Seja o intervalo de confiança de $(1-\alpha)$ para μ dado por

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left[\ \overline{X}\ \pm\ z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right]$$

- Chamamos de erro máximo provável ou margem de erro a quantidade $e\ =\ z_{1-\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}.$



Ideia para determinar o tamanho da amostra

- Dado o nível de confiança, $1 - \alpha$, e o tamanho da amostra, n, calculamos o IC.

$$\overbrace{\overline{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \longmapsto \quad \overline{X}}^{\text{Margem de erro}} \quad \longmapsto \quad \overline{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Predeterminado

característica dos dados

$$e = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

fixo

- Fixando um erro, podemos isolar n, chegando em:

Tamanho da amostra

$$n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{e} \right)^2$$

Tamanho de amostra para média quando σ é conhecido

Tamanho da amostra quando σ é conhecido

IC com σ conhecido:

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left[\overline{X} \pm \underbrace{z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{Erro} \right]$$

Tamanho da amostra:

$$n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{e} \right)^2$$

Exemplo

1. Seja uma variável aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 36)$. Calcule o tamanho da amostra, para que com 95% de confiança, a média amostral não se afaste da populacional por mais de 2 unidades.

$$P\left(\mid \bar{X} - \mu \mid \leq 2 \right) = 0.95$$

Solução

- Inicialmente, vamos padronizar:

$$
\begin{aligned}
P\left(\left| \bar{X} - \mu \right| \leq 2 \right) &= P\left(\frac{-2}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sigma/\sqrt{n}} \right) \\
&= P\left(\underbrace{\frac{-2}{6/\sqrt{n}}}_{-1.96} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \underbrace{\frac{2}{6/\sqrt{n}}}_{1.96} \right) = 0.95
\end{aligned}
$$

- Assim, temos:

$$
\frac{-2}{6/\sqrt{n}} = -1.96 \quad \rightarrow \quad n = \left(\frac{1.96 \times 6}{2} \right)^2 \approx 35
$$

Solução (cont.)

- Se o interesse fosse uma distância inferior a 0.5 unidades?

$$P\left(\,|\,\bar{X}-\mu\,|\,\leq\,0.5\,\right) \;=\; P\left(\underbrace{\frac{-0.5}{6/\sqrt{n}}}_{-1.96} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \underbrace{\frac{0.5}{6/\sqrt{n}}}_{1.96}\right)$$

- Então:

$$\frac{-0.5}{6/\sqrt{n}} = -1.96 \;\;\rightarrow\;\; n \;=\; \left(\frac{1.96\times 6}{0.5}\right)^2 \approx 554$$

Nível de confiança

característica dos dados

$$n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{e}\right)^2$$

Margem de erro

Tamanho de amostra para a proporção

Tamanho da amostra para estimar a proporção

$$e = z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$e^2 = z_{1-\alpha/2}^2 \cdot \frac{p(1-p)}{n}$$

$$\downarrow$$

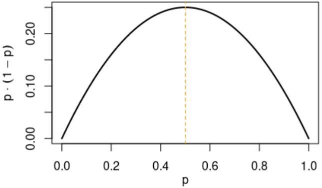
Tamanho da amostra:

$$n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{e}\right)^2 \cdot p(1-p).$$

IC para proporção:

$$IC_{1-\alpha}(p) = \left[\ \hat{p} \pm \underbrace{z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}_{Erro}\ \right]$$

1. **Estimativa conservadora:** Utilizar $p = 0.5$.

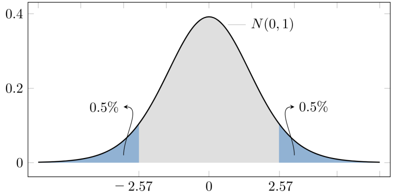


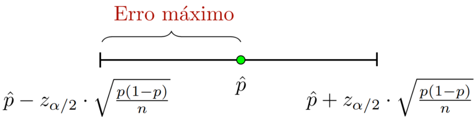
2. **Estimativa otimista:** Utilizar $\hat{p}$.

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{s} X_i}{s}$$

Exemplo: proporção de troncos defeituosos

- Deseja estimar a verdadeira proporção de troncos defeituosos, com um erro máximo de 3% e nível de confiança de 99%. Calcule o tamanho da amostra necessário para se estimar esta proporção.





- Considerando que o fabricante não tem informação prévia sobre a proporção de troncos defeituosos:

$$P\left(-2.57 < \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} < 2.57\right) = P\left(\hat{p} \underbrace{-2.57 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < p < \hat{p} + 2.57 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

$$2.57 \cdot \sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{n}} = 3\% \quad \rightarrow \quad n \approx 1844.$$

Referências

- Bussab, WO; Morettin, PA. Estatística Básica. São Paulo: Editora Saraiva, 2006 (5ª Edição).
- Magalhães, MN; Lima, ACP. Noções de Probabilidade e Estatística. São Paulo: EDUSP, 2008.