Distribuição amostral

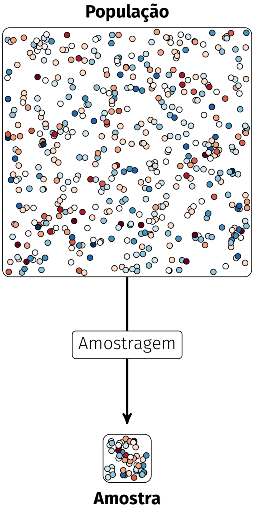
Parte 3

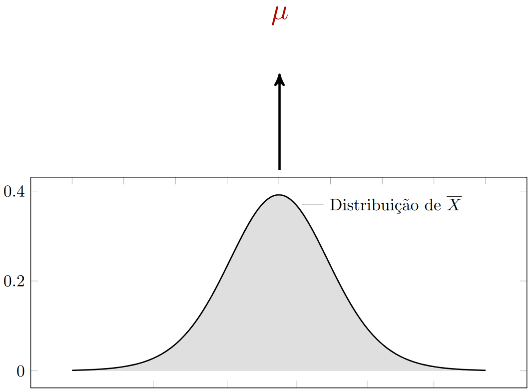
Prof.: Eduardo Vargas Ferreira

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DEST
Departamento de Estatística

Distribuição amostral da média



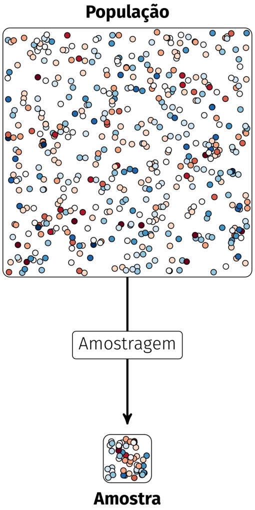


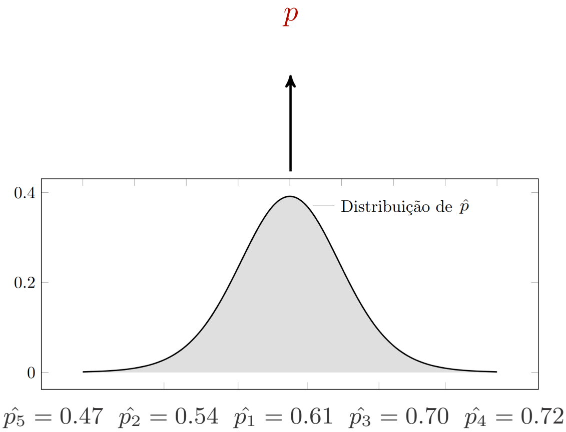
$\bar{x}_5 = 4.7 \quad \bar{x}_2 = 5.1 \quad \bar{x}_1 = 5.6 \quad \bar{x}_3 = 6.1 \quad \bar{x}_4 = 6.8$

Parâmetros e Estatísticas

Denominação	População	Amostra
Média	μ	$\overline{X} = \sum \frac{X_i}{n}$
Variância	σ^2	$S^2 = \sum \frac{\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{(n-1)}$
Proporção	p	$\hat{p}$
Mediana	Q_2	q_2
Intervalo inter-quartil	$d_Q = Q_3 - Q_1$	$d_q = q_3 - q_1$
Função de densidade	$f(x)$	histograma
Função de distribuição	$F(x)$	$F_e(x)$

Distribuição amostral da média





Parâmetros e Estatísticas

Denominação	População	Amostra
Média	μ	$\overline{X} = \sum \frac{X_i}{n}$
Variância	σ^2	$S^2 = \sum \frac{\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{(n-1)}$
Proporção	p	$\hat{p}$
Mediana	Q_2	q_2
Intervalo inter-quartil	$d_Q = Q_3 - Q_1$	$d_q = q_3 - q_1$
Função de densidade	$f(x)$	histograma
Função de distribuição	$F(x)$	$F_e(x)$

Distribuição amostral da média

- Vimos até agora que conhecendo a variância populacional, σ^2, pelo TCL

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1)$$

- Mas quando $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, com σ^2 **desconhecido**, aproximamos essa quantidade através da variância amostral, S^2, chegando em

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \quad \text{em que} \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Distribuição t de Student

Teorema: Seja $Z \sim N(0,1)$ e $Y \sim \chi^2_\nu$, com Z e Y independentes. Então, a variável aleatória $X = \dfrac{Z}{\sqrt{Y/\nu}}$ tem densidade dada por

$$f(x;\nu) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi\nu}}(1+x^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Notação: $X \sim t_\nu$.

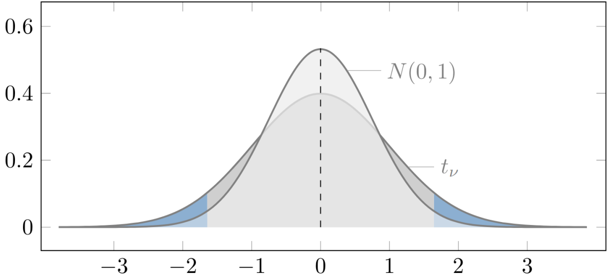
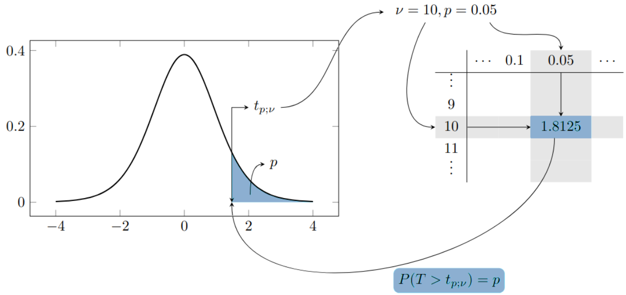


Tabela da distribuição t-Student



ν / p	0.4	0.3	0.25	0.2	0.15	0.1	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05
1	0.3249	0.7265	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	3.4420	3.8947	4.4737	5.2422	6.3138
2	0.2887	0.6172	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.0261	2.1894	2.3834	2.6202	2.9200
3	0.2767	0.5844	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	1.7413	1.8589	1.9950	2.1562	2.3534
4	0.2707	0.5686	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	1.6226	1.7229	1.8375	1.9712	2.1318
5	0.2672	0.5594	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	1.5579	1.6493	1.7529	1.8727	2.0150
6	0.2648	0.5534	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.5172	1.6033	1.7002	1.8117	1.9432
7	0.2632	0.5491	0.7111	0.8960	1.1192	1.4149	1.4894	1.5718	1.6643	1.7702	1.8946
8	0.2619	0.5459	0.7064	0.8889	1.1081	1.3968	1.4691	1.5489	1.6383	1.7402	1.8595
9	0.2610	0.5435	0.7027	0.8834	1.0997	1.3830	1.4537	1.5315	1.6185	1.7176	1.8331
10	0.2602	0.5415	0.6998	0.8791	1.0931	1.3722	1.4416	1.5179	1.6031	1.6998	1.8125

Exemplo: acumputura

- Considere um experimento para avaliar a efetividade do uso da acupuntura para aliviar a dor. A taxa sensorial de 15 pacientes resultou em uma média de 8,22 e um desvio-padrão de 1,67.

X_i = taxa sensorial do paciente i.

1. Supondo normalidade, obtenha:

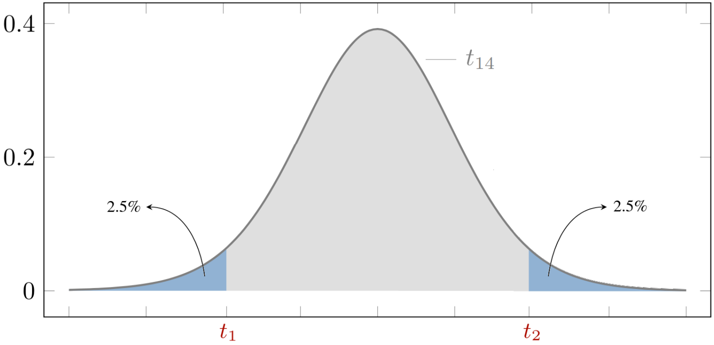
$$P\left(b < \mu < a\right) = 0.95$$

$$P\left(-a < -\mu < -b\right) = P\left(\frac{\bar{X} - a}{S/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X} - b}{S/\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(t_1 < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t_2\right) = 0.95$$

Exemplo: acumputura

$$P\left(t_1 < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_2\right) = 0.95$$



Exemplo: acumputura

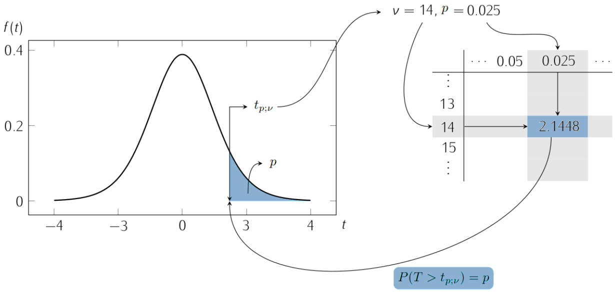
$$t_2 = \frac{\bar{X} - b}{S/\sqrt{n}} = 2.14 \;\rightarrow\; b = \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot 2.14$$

$$b = 7,30$$

$$t_1 = \frac{\bar{X} - a}{S/\sqrt{n}} = -2.14 \;\rightarrow\; a = \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot 2.14$$

$$a = 9,14$$

$$P\,(7,30 \;<\; \mu \;<\; 9,14) \;=\; 0.95$$



Pontos percentuais da distribuição t de Student com áreas na calda direita.

ν / p	0.4	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001
ν = 11	0.2596	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	3.4966	4.0247
12	0.2590	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	3.4284	3.9296
13	0.2586	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.3725	3.8520
14	0.2582	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.3257	3.7874
15	0.2579	0.6912	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	3.2860	3.7328
16	0.2576	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.2520	3.6862
17	0.2573	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.2224	3.6458

Referências

- Bussab, WO; Morettin, PA. Estatística Básica. São Paulo: Editora Saraiva, 2006 (5ª Edição).
- Magalhães, MN; Lima, ACP. Noções de Probabilidade e Estatística. São Paulo: EDUSP, 2008.