Estimação pontual e intervalo de confiança

Parte 5

Prof.: Eduardo Vargas Ferreira

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DEST
Departamento de Estatística

Intervalo de confiança para variância

O que vimos até aqui

Distribuição amostral

$$\mathrm{P}(\ c_1 \ < \mu \ < c_2 \ ) = 1 - \alpha.$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \longrightarrow P\left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \longrightarrow P\left(\bar{x} - t_{(n-1,1-\alpha/2)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{(n-1,1-\alpha/2)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

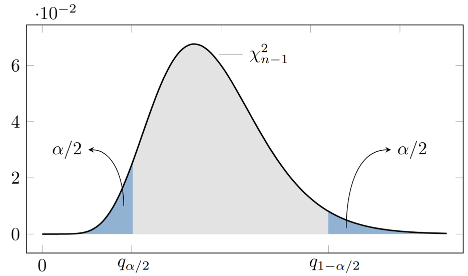
$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1) \longrightarrow P\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p < \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$$

$$? \longrightarrow \mathrm{P}\left(\ c_1 \ < \sigma^2 \ < c_2 \ \right) = 1 - \alpha.$$

Intervalo de confiança para variância

Distribuição amostral

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$



$$P\left[\; q_{\alpha/2,n-1} < \underbrace{(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} < q_{1-\alpha/2,n-1}}_{\downarrow \; (n-1)\frac{S^2}{q_{1-\alpha/2,n-1}} < \sigma^2} \;\right] = P\left[(n-1)\frac{S^2}{q_{1-\alpha/2,n-1}} < \sigma^2 < (n-1)\frac{S^2}{q_{\alpha/2,n-1}}\right]$$

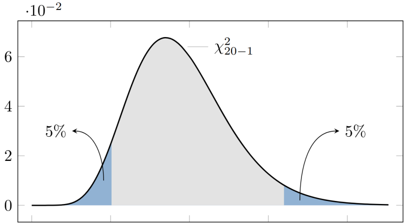
$$\overbrace{q_{\alpha/2,n-1} < (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}}^{\uparrow \; \sigma^2 < (n-1)\frac{S^2}{q_{\alpha/2,n-1}}}$$

Exemplo: variabilidade no diâmetro de parafusos

- Em uma amostra de 20 parafusos mediu-se seus diâmetros obtendo uma variância amostral de 0.0019.

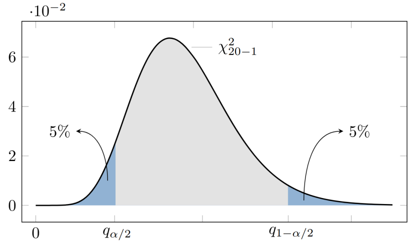
1. Encontre um intervalo com 90% de confiança para σ^2.

$$P\left(c_1 \; < \sigma^2 \; < c_2 \right) = 0.90$$



Exemplo: variabilidade no diâmetro de parafusos

- Em uma amostra de 20 parafusos mediu-se seus diâmetros obtendo uma variância amostral de 0.0019.

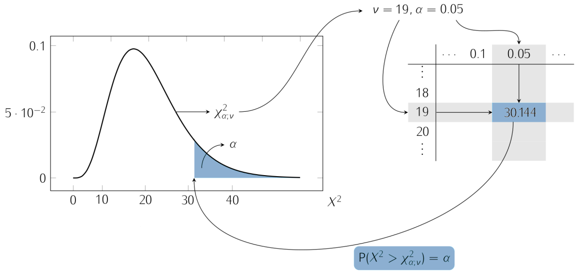


1. Encontre um intervalo com 90% de confiança para σ^2.

$$P\left(c_1 \; < \sigma^2 \; < c_2 \right) = 0.90$$

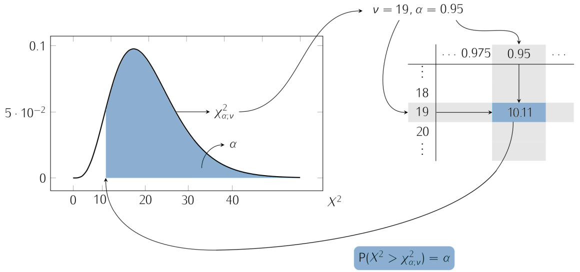
$$P\left[q_{\alpha/2} \; < (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \; < q_{1-\alpha/2} \right]$$

Exemplo: variabilidade no diâmetro de parafusos



ν/α	$\alpha = 0.995$	0.99	0.975	0.95	0.9	0.5	0.1	0.05	0.025	0.01
$\nu = 6$	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	5.348	10.645	12.592	14.449	16.812
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	6.346	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	7.344	13.362	15.507	17.535	20.090
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	8.343	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	9.342	15.987	18.307	20.483	23.209
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	10.341	17.275	19.675	21.920	24.725
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	11.340	18.549	21.026	23.337	26.217
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	12.340	19.812	22.362	24.736	27.688
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	13.339	21.064	23.685	26.119	29.141
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	14.339	22.307	24.996	27.488	30.578
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	15.338	23.542	26.296	28.845	32.000
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	16.338	24.769	27.587	30.191	33.409
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	17.338	25.989	28.869	31.526	34.805
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	18.338	27.204	30.144	32.852	36.191
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	19.337	28.412	31.410	34.170	37.566

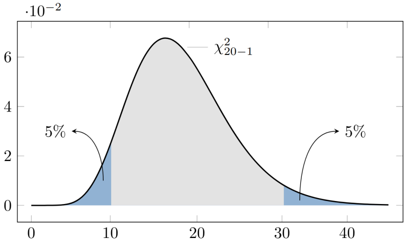
Exemplo: variabilidade no diâmetro de parafusos



ν/α	$\alpha = 0.995$	0.99	0.975	0.95	0.9	0.5	0.1	0.05	0.025	0.01
$\nu = 6$	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	5.348	10.645	12.592	14.449	16.812
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	6.346	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	7.344	13.362	15.507	17.535	20.090
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	8.343	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	9.342	15.987	18.307	20.483	23.209
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	10.341	17.275	19.675	21.920	24.725
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	11.340	18.549	21.026	23.337	26.217
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	12.340	19.812	22.362	24.736	27.688
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	13.339	21.064	23.685	26.119	29.141
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	14.339	22.307	24.996	27.488	30.578
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	15.338	23.542	26.296	28.845	32.000
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	16.338	24.769	27.587	30.191	33.409
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	17.338	25.989	28.869	31.526	34.805
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	18.338	27.204	30.144	32.852	36.191
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	19.337	28.412	31.410	34.170	37.566

Exemplo: variabilidade no diâmetro de parafusos

- Em uma amostra de 20 parafusos mediu-se seus diâmetros obtendo uma variância amostral de 0.0019.



1. Encontre um intervalo com 90% de confiança para σ^2.

$$P\left(c_1 < \sigma^2 < c_2\right) = 0.90$$

$$P\left[10.11 < (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} < 30.14\right] = P\left[(20-1)\cdot\frac{0.0019}{30.14} < \sigma^2 < (20-1)\cdot\frac{0.0019}{10.11}\right]$$

$$\mathrm{IC}_{0.90}\left(\sigma^2\right) = [0.0012\,,\ 0.0035]\,.$$

Resumindo

Intervalo de confiança para média

$$P\left(z_1 < \underbrace{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{\downarrow\, N(0,1)} < z_2\right) = 1-\alpha. \qquad P\left(t_1 < \underbrace{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}}_{\downarrow\, t_{n-1}} < t_2\right) = 1-\alpha. \qquad P\left(z_1 < \underbrace{\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}}_{\downarrow\, N(0,1)} < z_2\right) = 1-\alpha.$$

Intervalo de confiança para variância

$$P\left(q_1 < \underbrace{(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}}_{\downarrow\, \chi^2_{n-1}} < q_2\right) = 1-\alpha.$$

Referências

- Bussab, WO; Morettin, PA. Estatística Básica. São Paulo: Editora Saraiva, 2006 (5ª Edição).
- Magalhães, MN; Lima, ACP. Noções de Probabilidade e Estatística. São Paulo: EDUSP, 2008.