Testes de hipótese

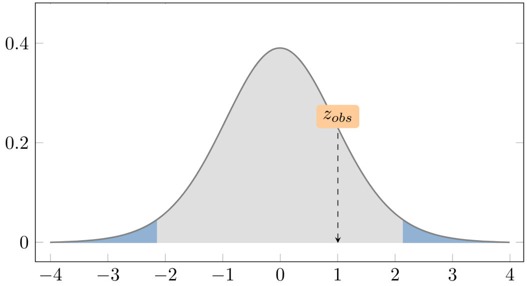
Parte 7

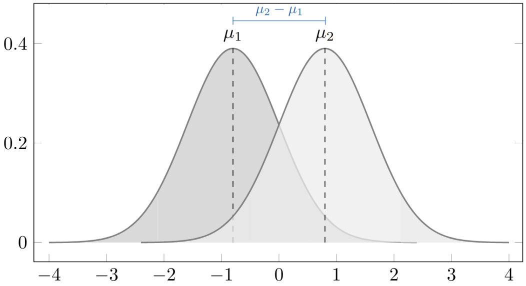
Prof.: Eduardo Vargas Ferreira

Introdução

$$H_0 : \mu = 3 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq 3$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad vs \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

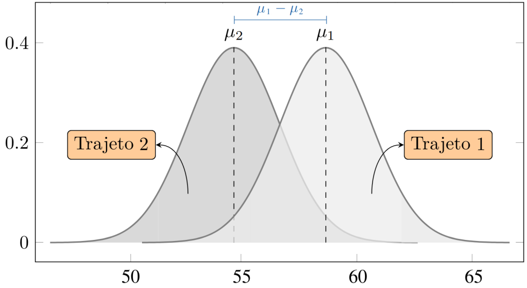




Exemplo: tempos de entrega

- Uma transportadora de mercadorias tem duas possibilidades de trajeto para realizar entregas. O gerente de logística desconfia não haver diferença significativa no tempo médio entre eles.

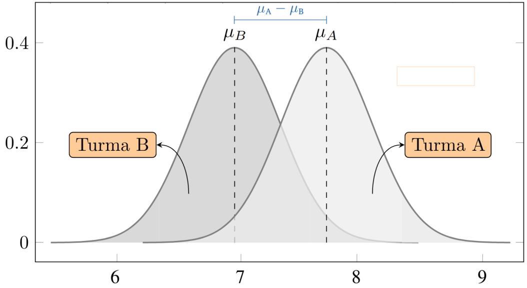
$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad vs \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$



Exemplo: rendimento das turmas

- Deseja-se testar uma metodologia de ensino. Para tanto, aplicou-se tal abordagem na turma A, permanecendo com o método tradicional na turma B. O rendimento médio dos alunos melhorou?

$$H_0 : \mu_A = \mu_B \quad vs \quad H_1 : \mu_A > \mu_B$$



Testes de hipótese para duas populações com σ^2 conhecido

Distribuição amostral da diferença

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad vs \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$ $\rightarrow$ $$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad vs \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

- Precisamos encontrar a **distribuição amostral da diferença das médias** $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$, da mesma forma que fizemos nas aulas passadas:

$H_0: \mu = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1: \mu \neq \mu_0$	$H_0: p = p_0 \;\; vs \;\; H_1: p \neq p_0$	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \;\; vs \;\; H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
$\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$	$(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

Distribuição amostral da diferença

- Considere duas populações X_1 e X_2 com médias μ_1 e μ_2, e desvios-padrão σ_1 e σ_2, então

$$\overline{X}_1 \sim \mathrm{N}\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right) \qquad \text{e} \qquad \overline{X}_2 \sim \mathrm{N}\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right).$$

$$\boxed{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) \sim ?}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) &= \mathbb{E}\left(\overline{X}_1\right) + \mathbb{E}\left(-1 \cdot \overline{X}_2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\overline{X}_1\right) - \mathbb{E}\left(\overline{X}_2\right) \\
&= \mu_1 - \mu_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) &= \mathbb{V}ar\left(\overline{X}_1\right) + \mathbb{V}ar\left(-1 \cdot \overline{X}_2\right) \\
&= \mathbb{V}ar\left(\overline{X}_1\right) + \mathbb{V}ar\left(\overline{X}_2\right) \\
&= \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}
\end{aligned}$$

Distribuição amostral da diferença

- Assim, a **distribuição amostral da diferença de médias** é dada por

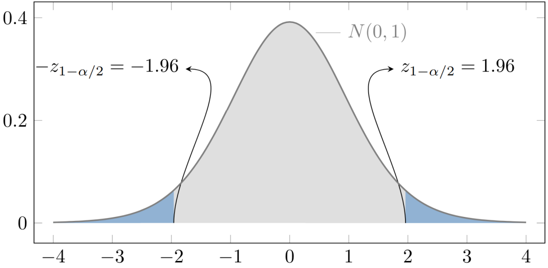
$$\left(\,\overline{X}_1 - \overline{X}_2\,\right) \sim N\left(\mu_1 - \mu_2\,, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

- Ou, alternativamente

$$\frac{\left(\,\overline{X}_1 - \overline{X}_2\,\right) - \left(\,\mu_1 - \mu_2\,\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Teste de hipótese

$$\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$



1. Definir as hipóteses nula e alternativa:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad vs \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

2. Com base em H_1, definir o tipo de teste.

3. Definir um nível de significância α.

4. Determinar a região crítica baseado na distribuição amostral, sob H_0.

5. Calcular a estatística de teste, sob H_0.

$$z_{obs} = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$

Exemplo: tempos de entrega

- Uma transportadora tem duas possibilidades de trajeto, e desconfia não haver diferença entre seus tempos médio. Sabe-se que $\sigma_1 = 8$ minutos e $\sigma_2 = 6$ minutos, além disso:

1. Analisando 45 entregas no primeiro trajeto, resultou em uma média de 57 minutos;
2. No segundo trajeto, com 30 entregas, e o tempo médio foi de 54 minutos.

Verifique se há diferença significativa entre o tempo médio dos trajetos, ao nível de 1% de significância.

Exemplo: tempos de entrega

1. Definição das hipóteses

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2 \quad vs \quad H_1: \ \mu_1 \neq \mu_2.$$

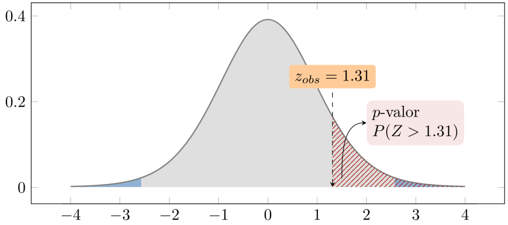
$$H_0: \ \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad vs \quad H_1: \ \mu_1 - \mu_2 \neq 0.$$

4. Determinação da região crítica:

$$\text{RC} = \{z < -2.57 \ \text{ ou } \ z > 2.57\}.$$

5. Cálculo da estatística de teste:

$$z = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(57 - 54) - 0}{\sqrt{\frac{8^2}{45} + \frac{6^2}{30}}} = 1.31.$$



6. Conclusão: $z \notin$ RC, portanto não rejeita-se H_0

$$\begin{aligned} \text{P-valor} &= 2 \times \text{P}\,(Z > 1.31 \mid H_0) \\ &= 0.19 \end{aligned}$$

Referências

- Bussab, WO; Morettin, PA. Estatística Básica. São Paulo: Editora Saraiva, 2006 (5ª Edição).
- Magalhães, MN; Lima, ACP. Noções de Probabilidade e Estatística. São Paulo: EDUSP, 2008.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DEST Departamento de Estatística