# Testes de hipótese

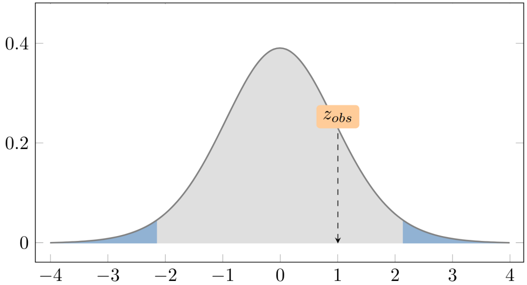
## Parte 8

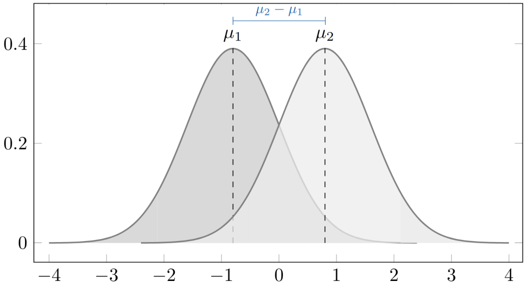
Prof.: Eduardo Vargas Ferreira

# Introdução

$$H_0 : \mu = 3 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq 3$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad vs \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$



# Distribuição amostral da diferença

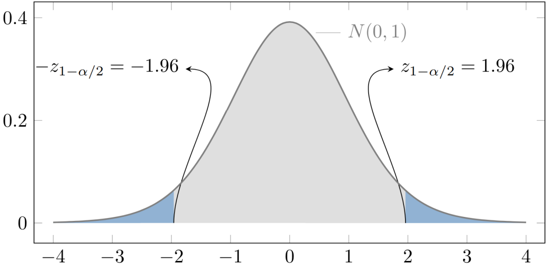
$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad vs \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad \rightarrow \quad H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad vs \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

- Precisamos encontrar a **distribuição amostral da diferença das médias** $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$, da mesma forma que fizemos nas aulas passadas:

| $H_0 : \mu = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu \neq \mu_0$ | $H_0 : p = p_0 \;\; vs \;\; H_1 : p \neq p_0$ | $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \;\; vs \;\; H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ |
|---|---|---|
| $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ | $\dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$ | $(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ |

# Teste de hipótese

$$\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$




1. Definir as hipóteses nula e alternativa:

   $$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad vs \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

2. Com base em $H_1$, definir o tipo de teste.

3. Definir um nível de significância $\alpha$.

4. Determinar a região crítica baseado na distribuição amostral, sob $H_0$.

5. Calcular a estatística de teste, sob $H_0$.

   $$z_{obs} = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$

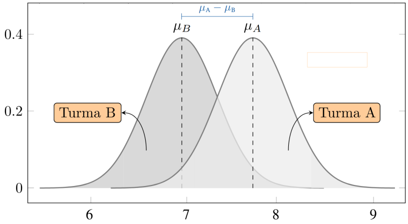
# Testes de hipótese para a média de duas populações com $\sigma^2$ desconhecido

# Suposições sobre as variâncias

- Quando não conhecemos $\sigma^2$, utilizamos a estimativa amostral $s^2$. No caso de teste de hipótese para a média, a distribuição deixar de ser **Normal** e se distribui segundo uma **t-student**.

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad \rightarrow \qquad \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

- No entanto, quando temos duas amostras, devem ser considerados dois casos:

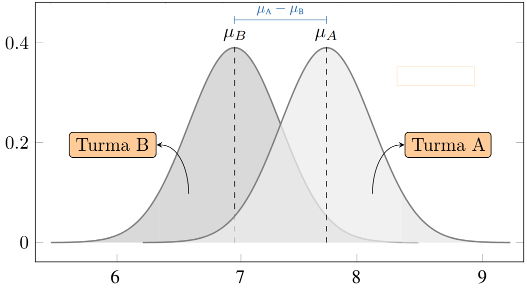



- Variâncias populacionais iguais ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$).
- Variâncias populacionais diferentes ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$).

# Exemplo: rendimento das turmas

- Deseja-se testar uma metodologia de ensino. Para tanto, aplicou-se tal abordagem na turma A, permanecendo com o método tradicional na turma B. O rendimento médio dos alunos melhorou?

$$H_0 : \mu_A = \mu_B \quad vs \quad H_1 : \mu_A > \mu_B$$

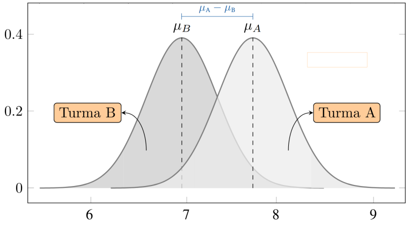


# Suposições sobre as variâncias

- Quando não conhecemos $\sigma^2$, utilizamos a estimativa amostral $s^2$. No caso de teste de hipótese para a média, a distribuição deixar de ser **Normal** e se distribui segundo uma **t-student**.

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad \rightarrow \qquad \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

- No entanto, quando temos duas amostras, devem ser considerados dois casos:




- Variâncias populacionais iguais ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$).
- Variâncias populacionais diferentes ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$).

# Estatística do teste quando as variâncias são iguais $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

- Neste caso, calculamos a **média ponderada das variâncias amostrais** $s_1^2$ e $s_2^2$ para obter uma estimativa da variância populacional comum

$$\hat{s}^2 = \frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

- A estatística de teste fica

$$\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\hat{s}^2 \left( \dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2} \right)}} \quad \sim \quad t_\nu, \qquad \text{em que} \quad \nu = n_1 + n_2 - 2$$

# Exemplo: rendimento das turmas

- Deseja-se testar uma metodologia de ensino. Para tanto, aplicou-se tal abordagem na turma A, permanecendo com o método tradicional na turma B.

$T_A$. Selecionada uma amostra de 12 alunos da turma A, resultou em uma média de 7.9 com desvio-padrão 0.6;

$T_B$. Selecionada uma amostra de 15 alunos da turma B, resultou em uma média de 6.7 com desvio-padrão 0.8;

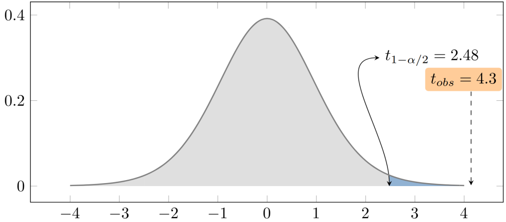
Verifique se turma A tem média maior do que a turma B, com um nível de significância de 1%, assumindo que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

# Exemplo: rendimento das turmas

1. Definição das hipóteses

$$H_0: \ \mu_A = \mu_B \quad vs \quad H_1: \ \mu_A > \mu_B.$$

$$H_0: \ \mu_A - \mu_B = 0 \quad vs \quad H_1: \ \mu_A - \mu_B > 0.$$




5. Cálculo da estatística de teste:

$$\begin{aligned} \hat{s}^2 &= \frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \\ &= \frac{(12 - 1) \cdot 0.6^2 + (15 - 1) \cdot 0.8^2}{12 + 15 - 2} \\ &= 0.517. \end{aligned}$$

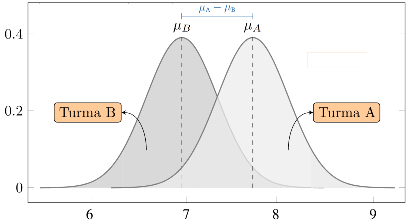
$$\begin{aligned} t &= \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - 0}{\sqrt{\hat{s}^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(7.9 - 6.7) - 0}{\sqrt{0.517 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{15}\right)}} \\ &= 4.309. \end{aligned}$$

# Suposições sobre as variâncias

- Quando não conhecemos $\sigma^2$, utilizamos a estimativa amostral $s^2$. No caso de teste de hipótese para a média, a distribuição deixar de ser **Normal** e se distribui segundo uma **t-student**.

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad \rightarrow \qquad \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

- No entanto, quando temos duas amostras, devem ser considerados dois casos:




- Variâncias populacionais iguais ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$).
- Variâncias populacionais diferentes ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$).

# Estatística do teste para o caso de variâncias diferentes $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

- Neste caso, ainda usamos as variâncias amostrais $s_1^2$ e $s_2^2$ para determinar o **desvio-padrão da diferença entre as duas médias**. A estatística de teste fica

$$\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \quad \sim \quad t_\nu.$$

- Porém, como as variâncias são diferentes, os **graus de liberdade** devem ser ajustados

$$\nu = \frac{(w_1 + w_2)^2}{\dfrac{w_1^2}{n_1 - 1} + \dfrac{w_2^2}{n_2 - 1}},$$

em que

$$w_1 = \frac{s_1^2}{n_1} \quad \text{e} \quad w_2 = \frac{s_2^2}{n_2}.$$

# Exemplo: tempo de uma tarefa doméstica

- Uma pesquisa avaliou a eficácia de dois tipos de treinamento, com a finalidade de reduzir o tempo médio em determinada tarefa doméstica.

- Foram selecionadas duas a.a. de populações Normais, em que assume-se $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, obtendo os resultados abaixo:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Treinamento 1** | $n_1 = 15$ | $\bar{y}_1 = 24.2$ min | $s_1 = 3.16$ min |
| **Treinamento 2** | $n_2 = 10$ | $\bar{y}_2 = 23.9$ min | $s_2 = 4.47$ min |

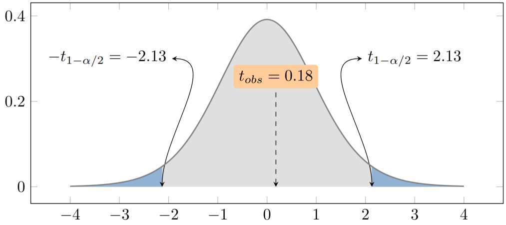
Verifique se o tempo médio para a realização da tarefa é igual para os dois treinamentos, ao nível de 5% de significância.

# Exemplo: tempo de uma tarefa doméstica

1. Definição das hipóteses

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2 \quad vs \quad H_1: \ \mu_1 \neq \mu_2.$$

$$H_0: \ \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad vs \quad H_1: \ \mu_1 - \mu_2 \neq 0.$$




4. Determinação da região crítica:

$$w_1 = \frac{s_1^2}{n_1} = \frac{3.16^2}{15} = 0.66 \qquad w_2 = \frac{s_2^2}{n_2} = \frac{4.47^2}{10} = 1.99$$

$$\nu = \frac{(w_1 + w_2)^2}{\frac{w_1^2}{n_1 - 1} + \frac{w_2^2}{n_2 - 1}} = \frac{(0.66 + 1.99)^2}{\frac{0.66^2}{15 - 1} + \frac{1.99^2}{10 - 1}} = 14.93$$

5. Cálculo da estatística de teste:

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{24.2 - 23.9}{\sqrt{\frac{3.16^2}{15} + \frac{4.47^2}{10}}} = 0.184.$$

# Referências


- Bussab, WO; Morettin, PA. Estatística Básica. São Paulo: Editora Saraiva, 2006 (5ª Edição).
- Magalhães, MN; Lima, ACP. Noções de Probabilidade e Estatística. São Paulo: EDUSP, 2008.